

# I cerchi di Lambert e i Seasonal Markers nelle meridiane analemmatiche

Riassunto in italiano, di max. 4 righe (non preceduto dalla parola Riassunto). Font Garamond 12 corsivo, 100%. Deve essere unicamente un riassunto del contenuto dell'articolo; non deve cioè contenere concetti non presenti nel testo e non deve essere usato come una premessa all'articolo. La rivista prevede la traduzione dei riassunti in inglese ed in francese, che può essere fornita dall'autore (su un file a parte); se mancante sarà approntata dalla redazione.

---

di Gianni Ferrari ([gfmerid@gmail.com](mailto:gfmerid@gmail.com))

Nel 1770 il matematico e astronomo Tedesco Johann Heinrich Lambert <sup>1</sup> pubblicò sul volume di matematica applicata *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und Deren Anwendung* un capitolo in cui presentava alcune note sulla meridiana analemmatica <sup>2</sup> (Fig. 1).

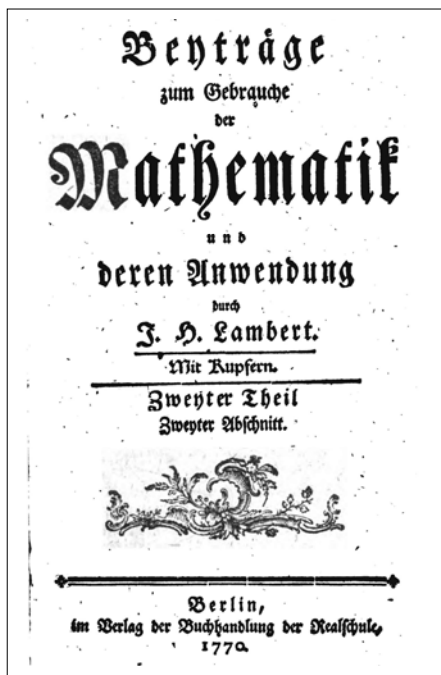


Fig. 1 – La copertina del libro di Lambert

In queste note egli dava, per la prima volta, un semplice metodo per trovare gli istanti dell'alba e del tramonto in una meridiana analemmatica orizzontale e, senza darvi molto peso, accennava anche a quelli che oggi sono noti con il nome di “Cerchi di Lambert” e che permettono di risolvere in modo geometrico il problema accennato.

Negli ultimi tempi diversi famosi gnomonisti (R. Rohr, Fred Sawyer, Helmut Sonderegger, Fer de Vries, ecc.) hanno ripreso e fatto conoscere (semplificandolo) lo studio di Lambert, mentre Roger Bailey ha studiato un metodo molto semplice per giungere in modo approssimato allo stesso risultato, inventando quelli che lui ha chiamato “Seasonal Markers” o “indicatori dell'alba e del tramonto”.

Ho pensato di esporre in questo articolo il sunto di questi lavori per farli conoscere agli gnomonisti italiani, per spiegare le argomentazioni di Lambert, per giustificare l'uso degli “indicatori” e indicare come sia possibile trovare la posizione di questi punti

## L'articolo di Lambert

Nell'articolo citato Lambert propone la Fig. 2, ricostruita dallo scrivente in Fig. 4 per una località con Latitudine di 30°.

Dopo aver dato indicazioni di come costruire l'ellisse, indica il punto calendariale G che si può ottenere tracciando, a partire dal fuoco F, un segmento inclinato sull'asse maggiore di un angolo uguale alla declinazione solare  $\delta$  (v. Fig. 4).

---

<sup>1</sup> Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777) matematico, fisico, astronomo e filosofo tedesco contemporaneo di Eulero, pioniere della geometria non euclidea. Fu il primo matematico a studiare le proprietà delle mappe conformi inventando sette nuovi metodi di proiezioni. In fisica inventò l'igrometro e pubblicò, per primo, un libro di fotometria, sulle proprietà della luce, sulla illuminazione e sull'ottica geometrica. L'unità fotometrica per la misura della luminanza ha il suo nome (“Lambert”).

<sup>2</sup> “Anmerkungen und Zusätze zur Gnomonik” (Commenti e aggiunte di gnomonica), Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und Deren Anwendung, Berlin, 1770, 3:314-362 plus Tables 3-5

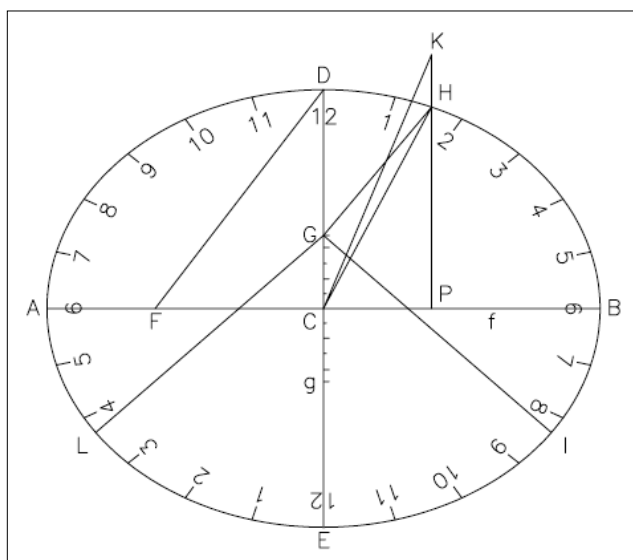


Fig. 2 - La figura originale di Lambert

Disegna poi il segmento CK, di lunghezza uguale al semiasse maggiore CB, prendendo l'angolo DCH uguale all'angolo orario  $\omega$ , per trovare alla fine il punto-ora H sull'ellisse.

L'angolo DGH è quindi l'azimut del Sole. Qui afferma, senza alcuna dimostrazione, che il segmento GH è uguale al coseno dell'altezza del Sole nell'ora H, nel giorno in cui la declinazione è uguale a  $\delta^3$  (NL-1)<sup>4</sup>.

Infine, senza dimostrazione, come se la proprietà fosse a tutti nota, Lambert scrive (Fig. 3) che :

- tracciando le normali all'ellisse passanti per il punto G si ricavano il punto L, che indica l'ora dell'alba, e il punto I che indica quella del tramonto<sup>5</sup> (Fig. 2) (NL-2) ;
- i punti L, I, G e i due fuochi appartengono a un cerchio (Fig. 3).

È questo quello che oggi viene chiamato cerchio di Lambert (NL-3).

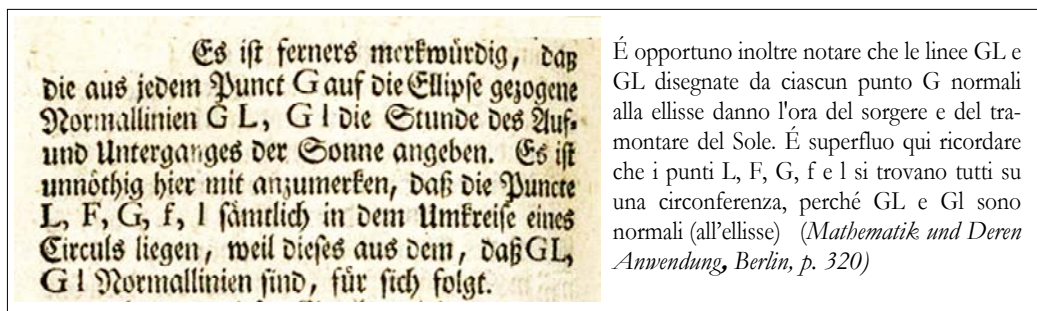


Fig. 3 - La spiegazione di Lambert

È opportuno inoltre notare che le linee GL e GI disegnate da ciascun punto G normali alla ellisse danno l'ora del sorgere e del tramontare del Sole. È superfluo qui ricordare che i punti L, F, G, f e I si trovano tutti su una circonferenza, perché GL e GI sono normali (all'ellisse) (*Mathematik und Deren Anwendung, Berlin, p. 320*)

### Qualche formula

Simboli e relazioni fra alcuni elementi di una meridiana analemmatica (Fig. 4):

$\varphi$ latitudine del luogo	$\delta$ declinazione del Sole alla data G
H punto-ora (ora H)	G punto-data
$\omega$ angolo orario (all'ora H)	Az azimut (all'ora H)
$\alpha$ anomalia eccentrica $\alpha = 90^\circ - \omega$	
Semiassi dell'ellisse $a = AO$	$b = CO = a \cdot \text{sen}(\varphi)$
Equazione in coordinate cartesiane	$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$
Coordinate cartesiane (x, y) di un punto H dell'ellisse:	$y = a \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\omega)$
Distanza dei Fuochi dal centro O	$F_1O = F_2O = \sqrt{a^2 - b^2} = a \cdot \cos(\varphi)$
Spostamento dello Gnomone	$s = OG = a \cdot \tan(\delta) \cdot \cos(\varphi) = FO \cdot \tan(\delta)$
Spostamento massimo dello Gnomone	$OG_M = a \cdot \tan(\varepsilon) \cdot \cos(\varphi) = FO \cdot \tan(\varepsilon)$
Angolo DGH=Azimut di H	$\tan(Az) = \frac{x}{y-s} = \frac{\text{sen}(\omega)}{\text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\omega) - \cos(\varphi) \cdot \tan(\delta)}$

<sup>3</sup> Esattamente è:  $\cos(h) = GH / GL$

<sup>4</sup> Le Note di Lambert che ho indicato con NL-1, NL-2, NL-3 sono spiegate nel testo dell'articolo.

<sup>5</sup> Sia nell'articolo di Lambert che in questo scritto si considerano come istanti dell'alba e del tramonto quelli in cui il centro del disco solare attraversa l'orizzonte senza tener conto della rifrazione.

da cui la nota relazione 
$$\text{sen}(Az) = \frac{\text{sen}(\omega) \cdot \cos(\delta)}{\cos(h)}$$

È immediato ricavare le lunghezze dei segmenti FG e GH:

$$FG = a \cdot \frac{\cos(\varphi)}{\cos(\delta)} \quad ; \quad GH = a \cdot \frac{\text{sen}(\omega)}{\text{sen}(Az)} = a \cdot \frac{\cos(h)}{\cos(\delta)}$$

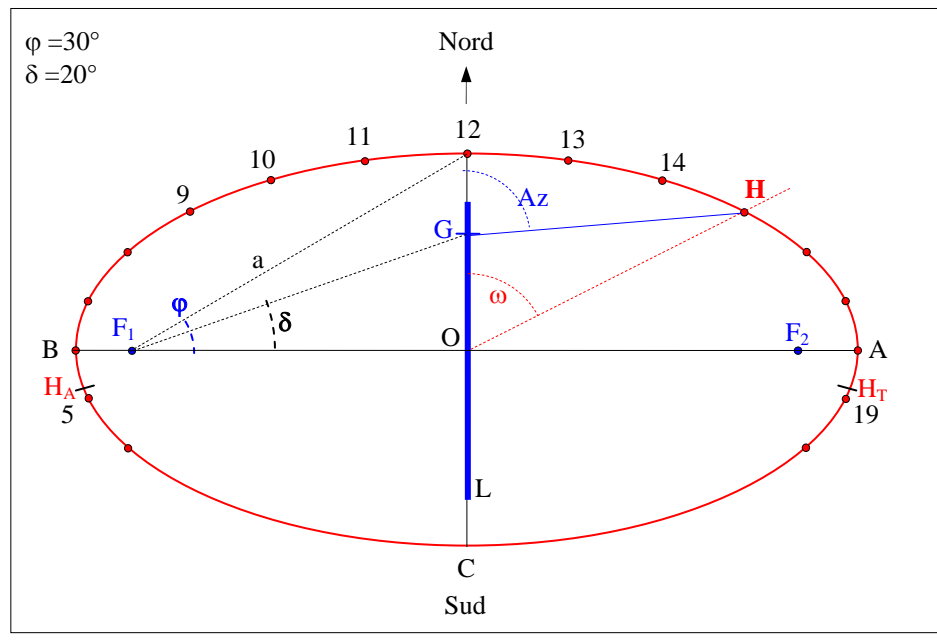


Fig. 4 –La figura di Lambert ricostruita

Quindi al tramonto (punto-ora  $H_T$ ) (Fig. 5) si ha  $h=0^\circ$

$$GH_T = \frac{a}{\cos(\delta)} \quad \text{da cui} \quad \cos(h) = \frac{GH}{GH_T}$$

che spiega il significato della affermazione nella nota (NL-1) di Lambert.

Si può osservare che al tramonto ( e all'alba) valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} \cos(\omega_T) &= -\tan(\varphi) \cdot \tan(\delta) & \cos(Az_T) &= -\text{sen}(\delta) / \cos(\varphi) \\ \frac{\text{sen}(Az_T)}{\text{sen}(\omega_T)} &= \cos(\delta) & \frac{\cos(Az_T)}{\cos(\omega_T)} &= \frac{\cos(\delta)}{\text{sen}(\varphi)} & \frac{\tan(Az_T)}{\tan(\omega_T)} &= \text{sen}(\varphi) \end{aligned}$$

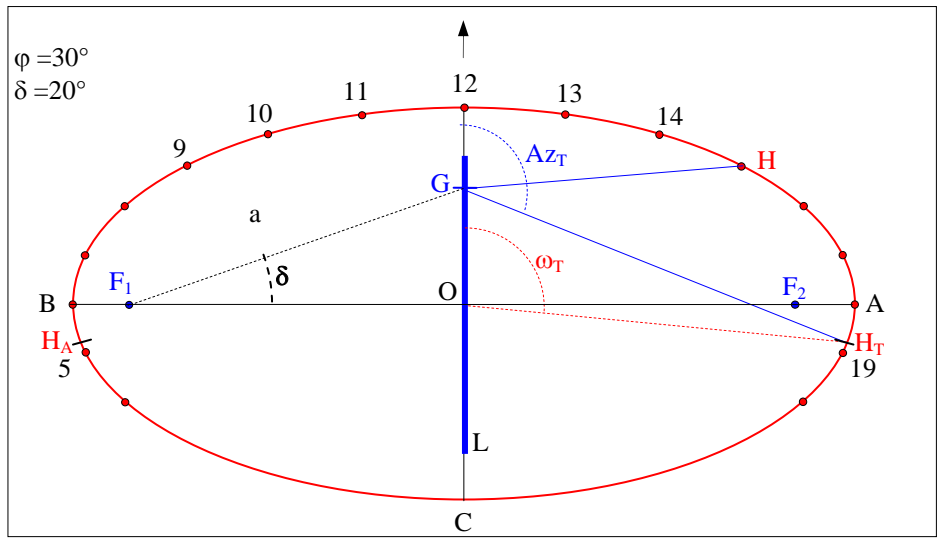


Fig. 5 –I punti dell'alba e del tramonto

**I punti che indicano le ore del tramonto e dell'alba sono sulle normali all'ellisse dal punto-data G.**

Per spiegare questa affermazione di Lambert - nota (NL-2) - consideriamo un punto qualsiasi  $H(x_H, y_H)$  sull'ellisse, la tangente alla curva e la normale HG in tale punto (Fig. 6).

G è il punto di intersezione della normale con l'asse minore.

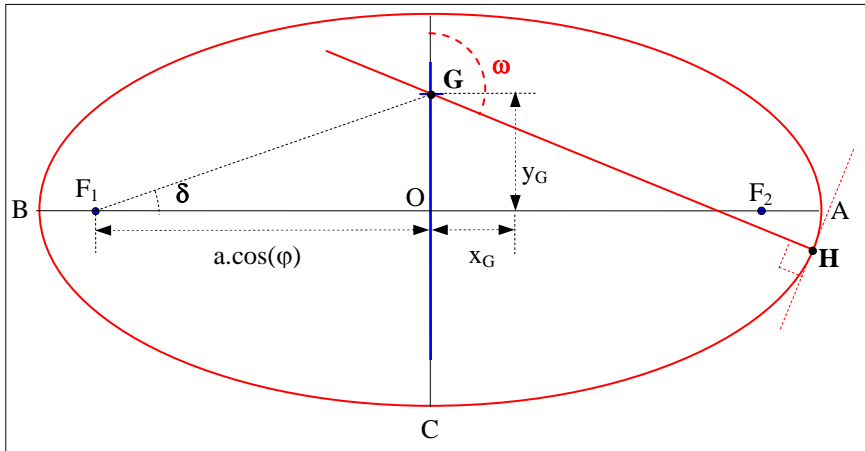


Fig. 6 -La normale al punto del tramonto

Indicando al solito con  $(a, b)$  i semiassi dell'ellisse, dalla geometria analitica si trova che l'equazione della normale e le coordinate del punto H sono date da:

$$y - y_H = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y_H}{x_H} \cdot (x - x_H)$$

$$\{x_G, y_G\} = \left\{ 0, y_H \cdot \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \right\}$$

e quindi nel caso di una meridiana analemmatica essendo  $b = a \cdot \sin(\varphi)$  risulta

$$y_G = -y_H / \tan^2(\varphi).$$

Se poi G è un punto-data risulta  $y_G = a \cdot \cos(\varphi) \cdot \tan(\delta)$  da cui  $y_H = -a \cdot \cos(\varphi) \cdot \tan^2(\varphi) \cdot \tan(\delta)$  che, uguagliata alla  $y_H = a \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\omega_H)$ , dà la nota relazione  $\cos(\omega_H) = -\tan(\varphi) \cdot \tan(\delta)$ .

Questa ci dice che l'angolo orario nel punto H è uguale a quello del Sole al tramonto e quindi che la retta normale all'ellisse per il punto-data G la incontra nel punto orario del tramonto.

Poiché non è sempre facile tracciare geometricamente la normale all'ellisse passante per un punto G sul semi-asse minore, indico un semplice metodo per trovarla ( Fig. 7, 8).

Prolungando il segmento GF sino alla verticale per l'estremo B dell'asse maggiore si trova il punto N con

$GN = a / \cos(\delta)$ . Poiché anche il segmento GH ha questa lunghezza, per trovare H è sufficiente tracciare l'arco GN sino ad incontrare l'ellisse.

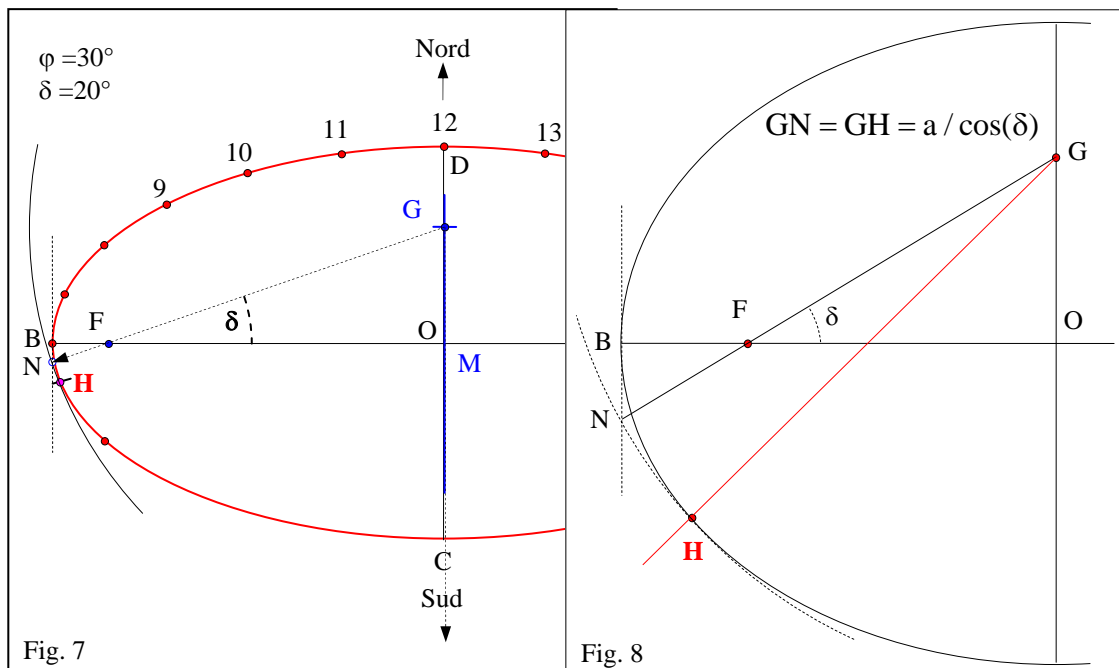


Fig. 7, 8 - Costruzione grafica per trovare i punti dell'alba e del tramonto (G.F.)

## Il cerchio di Lambert - vedi la precedente nota (NL-3).

In Fig. 9 si vede il cerchio di Lambert tracciato per la declinazione del Sole uguale a  $-20^\circ$ .

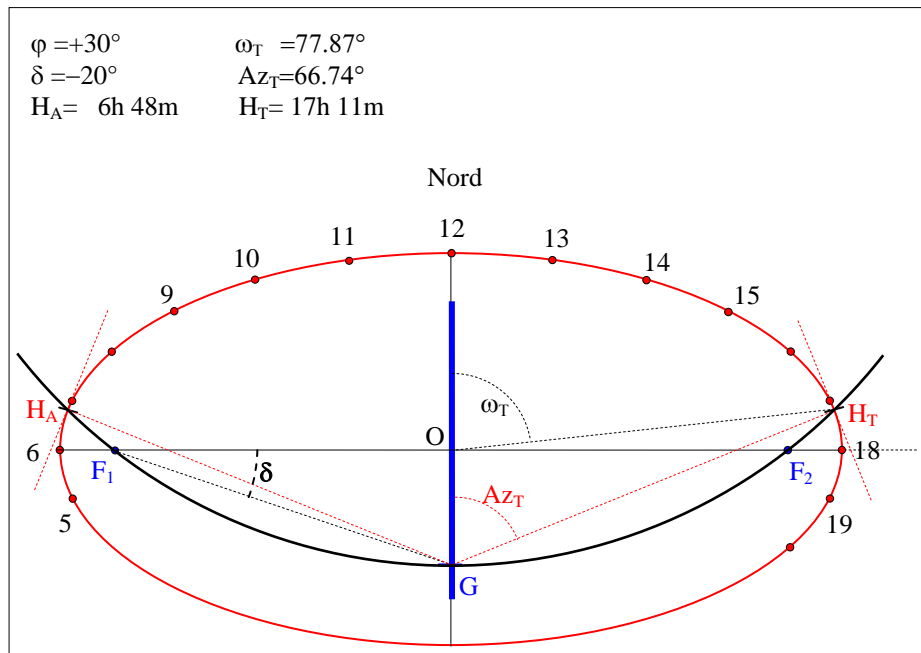


Fig. 9 –Il cerchio di Lambert

Per provare quanto affermato da Lambert trovo le intersezioni del cerchio, passante per i fuochi F e per il punto G, con l'ellisse, utilizzando la costruzione di Fig. 10.

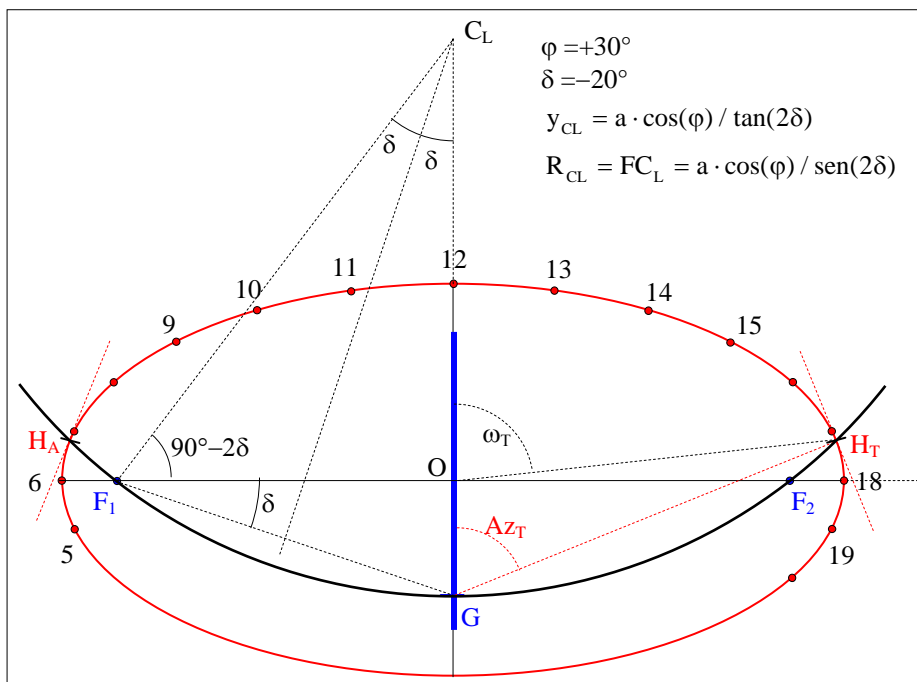


Fig. 10 –Centro e raggio del cerchio di Lambert

La bisettrice del segmento FG incontra l'asse minore nel punto  $C_L$  in cui si trova il centro del cerchio di Lambert il cui raggio è uguale al segmento  $FC_L$ . È immediato ricavare le relazioni:

$$y_C = OC_L = a \cdot \frac{\cos(\varphi)}{\tan(2 \cdot \delta)}$$

$$R_{CL} = FC_L = a \cdot \frac{\cos(\varphi)}{\sin(2 \cdot \delta)}$$

Le equazioni del cerchio e dell'ellisse sono:

$$x^2 + \frac{y^2}{\sin^2(\varphi)} = a^2$$

$x^2 + (y - y_{CL})^2 = R_{CL}^2$  da cui, con alcuni passaggi, si possono ricavare le coordi-

nate dei due punti cercati  $H_T$  e  $H_A$ :  $\left\{ \begin{array}{l} x_{HT} = a \cdot \sin(\omega_T) \\ y_{HT} = a \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\omega_T) \end{array} \right\}$  che ci dicono che i cerchi di Lambert intersecano

l'ellisse proprio nei punti-ora del tramonto e dell'alba.

Nella Fig. 11 sono tracciati i cerchi di Lambert per i giorni di inizio dei Segni zodiacali in una meridiana analematica per latitudine  $45^\circ$ .

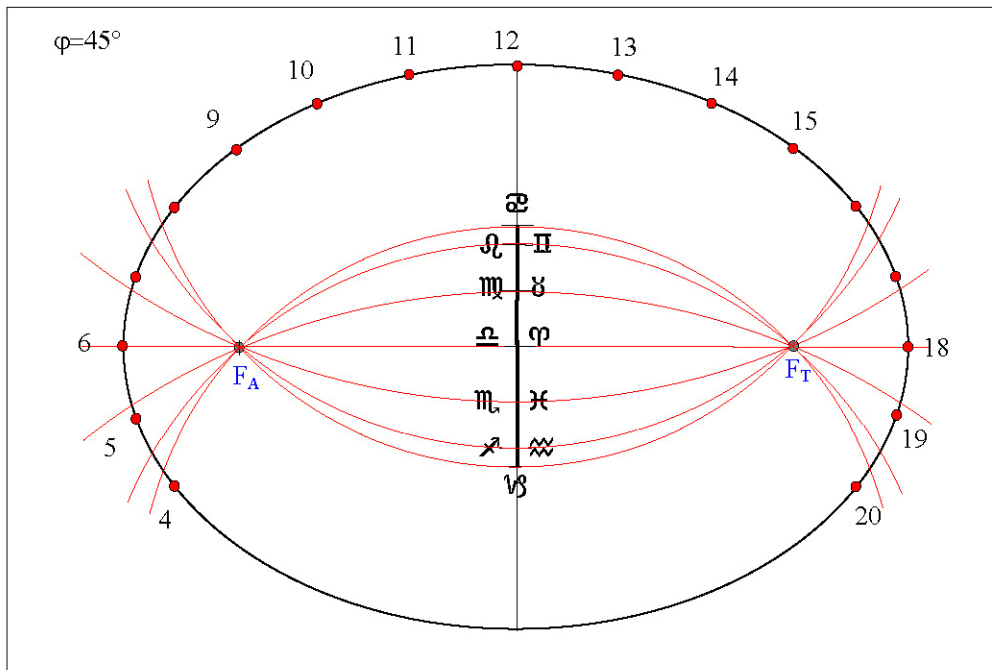


Fig. 11 – I cerchi di Lambert per i giorni di inizio dei Segni zodiacali

### Punti indicatori dell'alba e del tramonto – Seasonal Markers

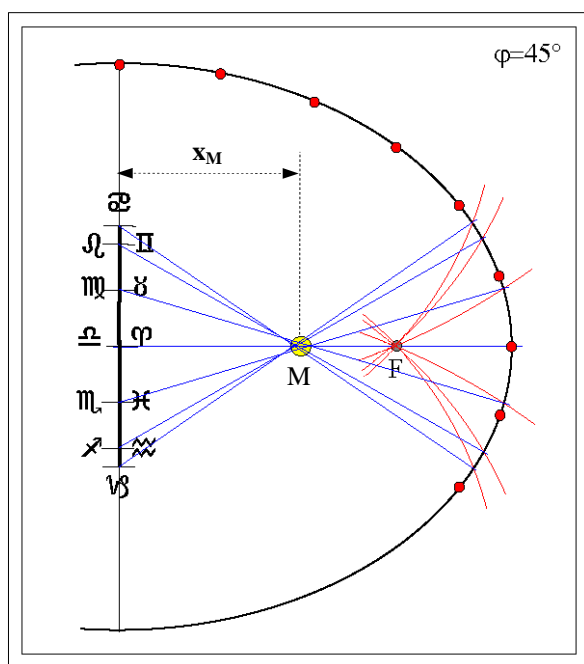


Fig. 12 – I punti dell'alba e del tramonto

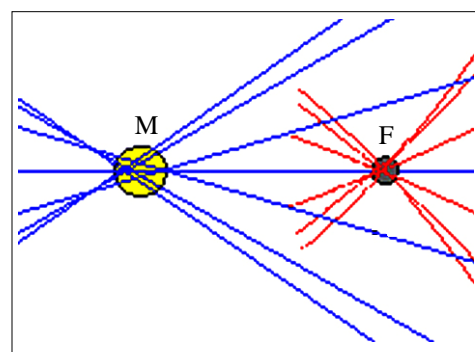


Fig. 13 - Particolare

Nel 2002 lo gnomonista statunitense Roger Bailey, partendo dalla osservazione che quasi sempre lo gnomone verticale in una meridiana analematica è una persona, ebbe l'idea di cercare se era possibile trovare sia la direzione verso cui l'osservatore deve guardare per trovare l'ora del tramonto, sia quella in cui trovare, sull'orizzonte, la corrispondente posizione del Sole <sup>6</sup>.

Nella sua ricerca, descritta in un articolo presentato alla Conferenza annuale della NASS <sup>7</sup>, Bailey dopo aver tracciato

<sup>6</sup> Anche se in questo articolo mi riferisco soltanto al tramonto, ovviamente i ragionamenti possono essere ripetuti anche per la ricerca dell'ora e dell'Azimut dell'alba.

<sup>7</sup> L'articolo *Seasonal Markers for Analemmatic Sundials*, è stato pubblicato in *The Compendium – Journal of the North American Sundial Society*, Sep 2003, 10(3):1-7.

i segmenti che dalla posizione dello gnomone in diverse epoche dell'anno raggiungono gli istanti del tramonto sulla ellisse, si accorse che questi segmenti intersecavano l'asse maggiore in punti tutti fra loro molto vicini (Fig. 12, 13). Si rese quindi conto che, scegliendo opportunamente un punto M (marker), posto all'incirca al centro dell'insieme dei punti trovati, era possibile indicare all'osservatore la direzione verso cui guardare per trovare l'ora del tramonto (Fig. 14).

Bailey ha dato a questi punti il nome di *Seasonal Markers* o punti indicatori (dell'alba e del tramonto).

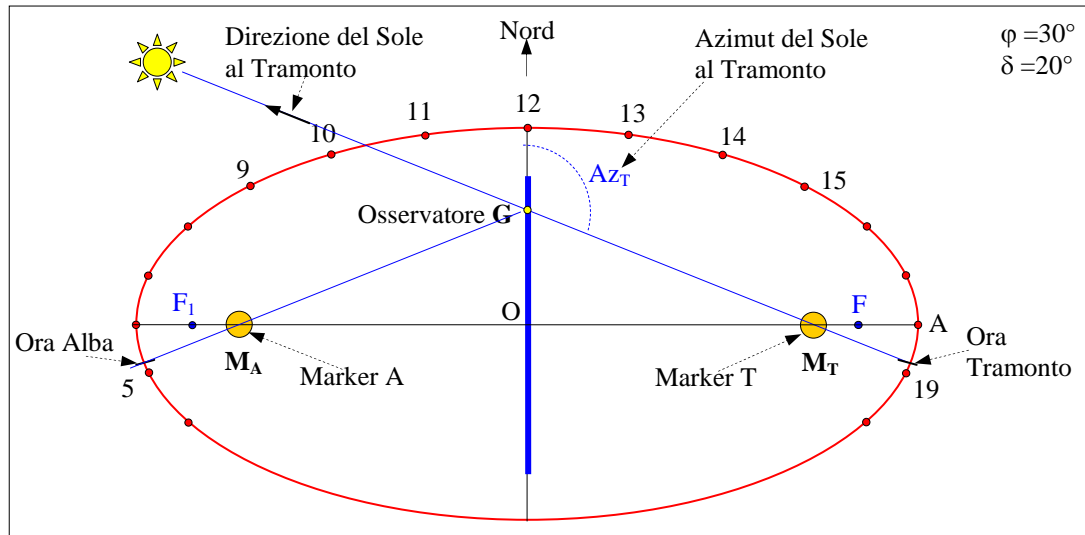


Fig. 14 –Come utilizzare i SeasonalMarkers

### La ricerca dei “punti indicatori”

Il criterio per trovare la posizione migliore ove porre i punti indicatori è il seguente:

- si fissa un possibile punto indicatore M ;
- si sceglie un punto-data G (ove si trovano i piedi dell'osservatore);
- si calcola la direzione della semiretta che da G arriva all'ora del tramonto e quella della semiretta passante per G e M e si trova lo scostamento fra queste due direzioni.  
Questo scostamento è in pratica l'errore che l'osservatore commette prendendo come ora del tramonto quella che può vedere guardando nella direzione del punto indicatore M.
- Con lo stesso punto M si ripetono i passaggi indicati cambiando il punto-data G da un estremo all'altro. Così si trovano i valori minimo e massimo degli scostamenti che si hanno con il punto M scelto.
- Si ripetono le operazioni cambiando la posizione di M.

La posizione più opportuna dei punti Marker è quella ove si hanno scostamenti minimi nelle direzioni sopra ricordate, cioè dove risultano minori gli errori nella individuazione dell'ora del tramonto.

Per la ricerca sopra descritta la posizione del punto M , e quindi la sua distanza dal centro dell'ellisse ( $x_M$ ), può essere scelta in modi diversi.

In questo studio o seguito questo metodo: fissato un valore della declinazione  $\delta_M$  del Sole, e quindi del punto-data G, si prende come M il punto intersezione del segmento che da G arriva all'istante del tramonto nella data considerata, con l'asse maggiore dell'ellisse.

In Fig. 15 sono riportate le curve degli “errori” (in gradi) fra la direzione in cui l'osservatore vede il Marker e quella verso l'ora del tramonto per una località con latitudine  $45^\circ$ , con punti marker M individuati da diversi valore di  $\delta_M$ . Come si può vedere come il valore “preferibile” di M si a prendendo  $\delta_M=20^\circ$  circa (curva rossa) con un massimo scostamento (errore nella direzione) di circa  $0.8^\circ$ .

Per valori di  $\delta$  maggiori (curva verde) o minori (curva blu) gli errori massimi, per  $\varphi=45^\circ$ , aumentano (rispettivamente  $1.2^\circ$  e  $1.5^\circ$  circa)

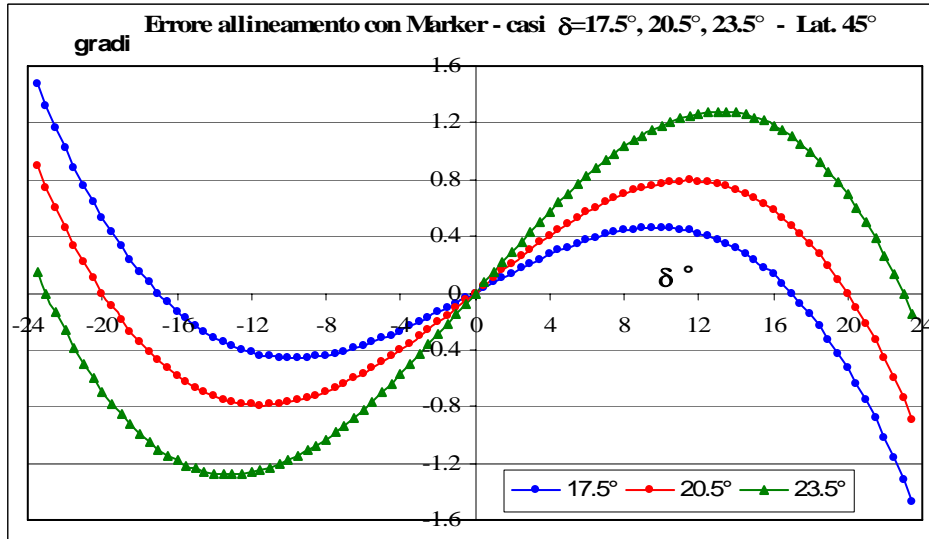


Fig. 15 –I punti dell'alba e del tramonto

Si può verificare che con valori di Latitudine da 35° a 50° il valore ottimale di  $\delta_M$  è compreso fra 20.27° e 20.29°. Nel suo studio Bailey consiglia il valore  $\delta_M=20.2^\circ$ .

All'aumentare della latitudine l'errore di allineamento massimo aumenta come è indicato nel grafico di Fig. 16.

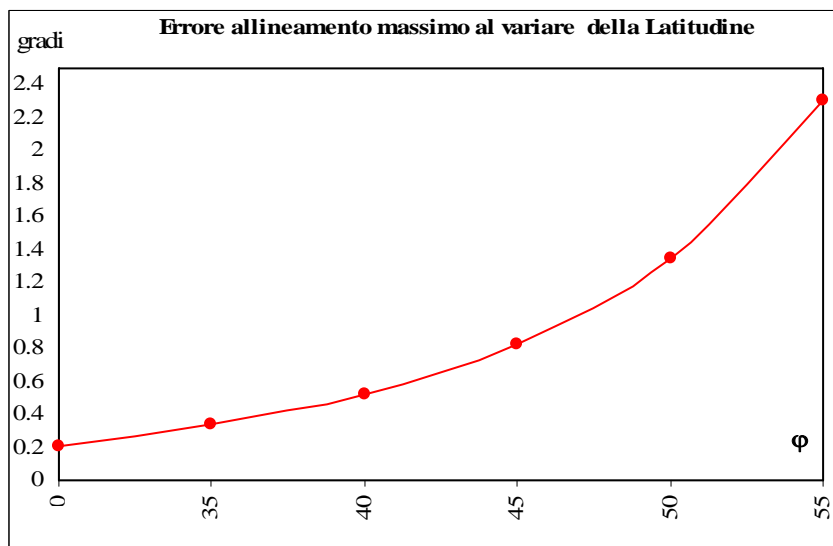


Fig. 16 –I punti dell'alba e del tramonto

### La posizione dei “punti indicatori”

Si può facilmente dimostrare che la distanza di  $x_M$  per  $\delta=\delta_M$  è data da

quindi prendendo  $\delta_M=20.28^\circ$  si ha la formula empirica :

$$x_M = a \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \sqrt{1 - \frac{\tan^2(\varphi)}{7.3}}$$

Nella fotografia una meridiana analematica con segnati i Seasonal Markers realizzata da Renzo Righi in località Bargi, Comune di Camugnano, nell'estate 2014. Semiasse maggiore 190 cm., Latitudine 44.132°, ora dell'alba al Solstizio 4 20m.



Si possono vedere il Marker dell'alba e la parte dei cerchi di Lambert relativi al Solstizio estivo che dal Fuoco arrivano all'ellisse.

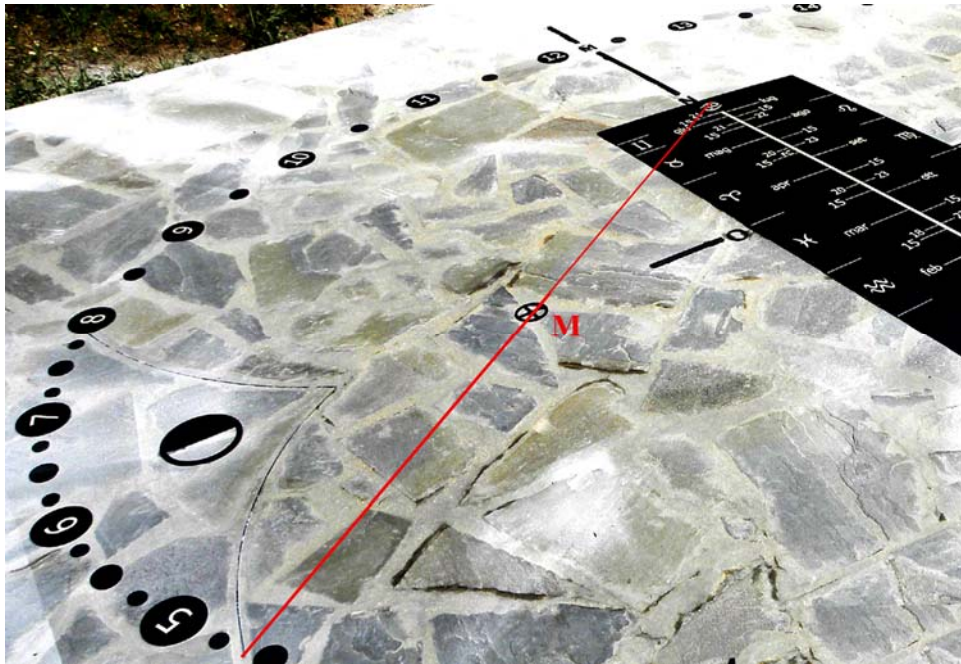


Fig. 17 –I punti dell'alba e del tramonto

## Bibliografia

- [1] Johann Heinrich Lambert , “*Anmerkungen und Zusätze zur Gnomonic*”, *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und Deren Anwendung*, Berlin, 1770, 3:314-362 plus Tables 3-5  
Traduzione parziale in inglese di John F. Schilke in *The Analemmatic Sundial SourceBook* ,The North American Sundial Society 2004
- [2] Charles-Nicolas Peaucellier, “*Théorie du cadran solaire de Dijon, sa généralisation*”, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, Nov. 1856, 15:401-402  
Contiene la dimostrazione della normalità
- [3] René J. Vinck, “*Zonsomkomst en –ondergang op het horizontale vlak*”, *Zonnetijdingen – Bulletin of the Flemish Sundial Society*, 1996, 3:10-11.
- [4] Roger Bailey, “*Seasonal Markers for Analemmatic Sundials*”, *The Compendium – Journal of the North American Sundial Society*, Sep 2003, 10(3):1-7.
- [5] Helmut Sonderegger, “*Analemmatic Sundials and Mean Time*”, *The Compendium – Journal of the North American Sundial Society*, Sep 2003, 10(3):8-14.
- [6] Bernard Rouxel, “*A Note On Lambert Circles*”, *The Compendium – Journal of the North American Sundial Society*, Mar 2004, 11(1):9-10.