

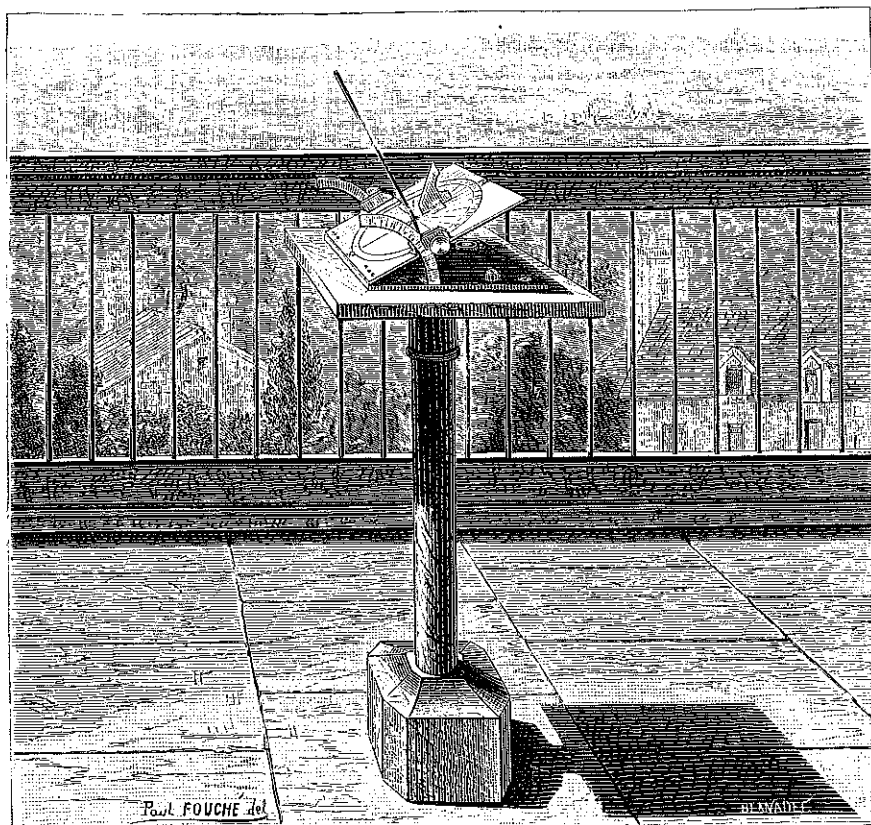
## LE CADRAN SOLAIRE A RÉTROGRADATION

DE L'OBSERVATOIRE DE JUVISY, ET LE MIRACLE D'ISAÏE.

On lit dans la Bible, au quatrième livre des *Rois*, ch. xx :

En ce temps-là Ezéchias fut malade à la mort, et le prophète Isaïe, fils d'Amos,

Fig. 103.



Cadran solaire à rétrogradation de l'Observatoire de Juvisy.

vint le trouver, et lui dit : Voici ce que dit le Seigneur : Mettez ordre à votre maison, car vous ne vivrez pas plus longtemps.

Alors Ezéchias, tournant le visage contre la muraille, fit sa prière au Seigneur.

Le Seigneur parla à Isaïe et lui dit : Retournez et dites à Ezéchias : Le Seigneur a entendu votre prière et a vu vos larmes; vous allez être guéri, vous irez dans trois jours au temple. J'ajouterai encore quinze années aux jours de votre vie.

Alors Isaïe dit aux serviteurs du roi : Apportez-moi une masse de figues. Ils la lui apportèrent et la mirent sur l'ulcère du roi. Et il fut guéri.

Mais Ezéchias avait dit d'abord à Isaïe : Quel signe aurai-je que le Seigneur me guérira?

Isaïe lui répondit : Voici le signe que le Seigneur vous donnera pour vous assurer de sa parole. Voulez-vous que l'ombre du Soleil avance ou qu'elle rétrograde de dix degrés?

Ezéchias lui dit : Il est aisé que l'ombre s'avance de dix degrés, et ce n'est pas ce que je désire que le Seigneur fasse; mais qu'il la fasse retourner en arrière de dix degrés.

Le prophète Isaïe invoqua donc le Seigneur, et *il fit que l'ombre retourna en arrière sur l'horloge d'Achaz par les dix degrés par lesquels elle était déjà descendue.*

Tel est textuellement l'épisode rapporté par la Bible. Ce récit est intéressant au double point de vue historique et philosophique. D'une part, il nous montre que les cadrans solaires étaient en usage en Judée l'an 709 avant notre ère (le premier cadran solaire grec a été construit à Athènes en l'an — 433 par Méton, et le premier cadran solaire romain a été construit à Rome par Papirius Cursor en — 306); d'autre part, il nous rappelle que, pour la cour théocratique du roi de Judée, le Soleil pouvait être arrêté dans sa marche (comme au temps de Josué), ralenti ou accéléré. Toutefois, il y avait des nuances dans la difficulté du miracle et par conséquent des degrés dans sa valeur : « Il est aisé que l'ombre s'avance, » pense le roi; il serait bien plus difficile de la faire reculer! Cette simple réflexion ne donne-t-elle pas la note de l'idée tout humaine, tout anthropomorphique que l'on se formait alors sur le Créateur et son œuvre?

Quoi qu'il en soit, la Bible assure que l'ombre du Soleil rétrograda de dix degrés sur le cadran solaire d'Achaz.

Cette histoire nous avait toujours paru sujette à caution. Peut-être a-t-on tort d'enseigner aux enfants que la Bible est un livre écrit sous la dictée de Dieu, véridique et infaillible en tous ses points. On accoutume ainsi notre enfance à envelopper toutes les parties du récit biblique dans un même respect, depuis Adam jusqu'à Jésus. Lorsque, ayant acquis l'âge de raison, nous savons que ni Josué ni Isaïe n'ont arrêté le Soleil, nous n'osons pas nous affranchir de l'interprétation littérale, et, en reconnaissant l'erreur d'un épisode, nous sommes conduits à rejeter en même temps le livre tout entier, du commencement à la fin.

Il en serait autrement, si l'on enseignait que la Bible est une œuvre importante au point de vue historique, respectable comme monument de l'une des plus anciennes civilisations, supérieure à beaucoup d'autres épopées, mais

œuvre humaine, dans laquelle on peut garder ce qui est bon et oublier ce qui est mauvais ou erroné. Le jeu perpétuel des miracles, entre autres, qui est si intimement lié à toute l'histoire du peuple juif, qui met à chaque instant en scène, à propos d'un roitelet ou d'un massacreur quelconque, la toute-puissance du Créateur de l'Univers et qui rabaisse et compromet si puérilement l'idée de Dieu, ne devrait-il pas être présenté comme le témoignage d'une époque d'ignorance et de crédulité, au lieu d'être défendu comme un fait réel? Nous livrons ces réflexions aux défenseurs futurs de la Bible.

Comme beaucoup d'autres, nous avons rejeté le miracle d'Isaïe ainsi que celui de Josué sur le compte d'une exagération de l'imagination orientale, admettant que, dans le cas de Josué, les combattants ont pu croire sincèrement la journée plus longue que d'habitude (le même fait s'est reproduit sous Charlemagne, à Roncevaux,) et que, dans le cas d'Isaïe, le prophète avait, par un « pieux mensonge » et dans un « bon motif », dérangé le cadran solaire sous les yeux du roi ou de quelques personnages de la cour envoyés par lui : on sait que les cours, en général, ont toujours été de remarquables réunions d'ignorants.

Un jour de l'année 1880, nous reçûmes à Paris la visite d'un ingénieur bien connu, M. Etienne Guillemain, colonel du génie à Lausanne, venant nous exposer que le miracle d'Isaïe pouvait être renouvelé, et qu'il l'avait été dès le seizième siècle par Nonius, l'inventeur du « vernier », né en 1492, mort en 1577. M. Guillemain lui-même l'avait répété à l'aide d'un cadran solaire provisoire, d'après les indications données dans le *Dictionnaire des amusements des Sciences mathématiques et physiques*, publié, sans nom d'auteur, en 1792. Malheureusement, dans sa démonstration, Nonius ne donnait aucun calcul et commettait des erreurs, si bien que le renouvellement de son expérience était une affaire assez laborieuse.

L'année suivante, le 11 août 1881, nous fîmes, à Lausanne même, en compagnie du savant et sympathique colonel Guillemain, l'essai d'un cadran solaire à rétrogradation, et quelques mois après nous écrivions les lignes suivantes dans notre ouvrage, *Les Etoiles* (p. 760), au chapitre des Annales de l'Astronomie :

An 709 avant Jésus-Christ. — Les cadrans solaires étaient en usage, et depuis longtemps sans doute, sous le règne d'Ezéchias. Quinze ans avant la mort de ce roi de Juda, la Bible rapporte que le prophète Isaïe fit rétrograder l'ombre de dix degrés sur le cadran solaire d'Achaz. C'est là une opération que l'on a taxée jusqu'à ce jour de miraculeuse, mais qui peut se faire sans miracle, si l'on donne au cadran une inclinaison calculée suivant la latitude du lieu. Nous avons nous-

même renouvelé le miracle d'Isaïe, l'été dernier, à Lausanne. Nous ferons connaître la manière de renouveler ce fameux miracle d'Isaïe, dans l'un des premiers numéros de notre *Revue astronomique*.

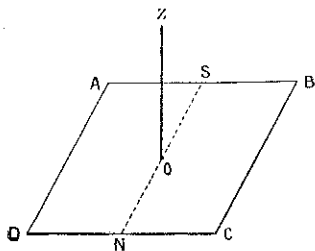
Des travaux plus urgents ont retardé jusqu'ici la rédaction de cet article. Un vieux proverbe nous excuse, en assurant que tout vient à point à qui sait attendre.

En établissant un petit cadran solaire horizontal à l'Observatoire de Juvisy, nous l'avons organisé de telle sorte qu'il peut servir à la fois de cadran solaire ordinaire et de cadran solaire extraordinaire pour la reproduction du miracle d'Isaïe.

Voici les éléments du problème :

Prenons une planchette rectangulaire ABCD munie d'un style perpendiculaire. Plaçons cette planchette horizontalement et orientons-la de telle sorte

Fig. 104.



que la ligne SN soit dans la direction Sud-Nord. A midi, l'ombre du style se dirigera suivant la ligne ON.

Maintenant, au lieu de laisser la planchette horizontale, inclinons-la, en prenant la ligne AB pour charnière, vers le Soleil, qui est au Sud. L'ombre du style se raccourcira à mesure que l'inclinaison augmentera, et elle arrivera à être nulle à l'heure de midi. Alors le style est pointé juste vers le Soleil.

Continuons encore l'inclinaison de la planchette : l'ombre du style, au lieu de se projeter au Nord, comme tout à l'heure, va se projeter au Sud.

C'est dans cette position que l'on peut observer la rétrogradation de l'ombre. A midi, l'ombre du style se projette suivant la ligne OS. Puis on la voit marcher très rapidement vers la gauche ou vers l'Est jusqu'à un certain angle. Là elle s'arrête. Ensuite elle revient sur ses pas et rétrograde jusqu'au coucher du Soleil.

Il va sans dire que c'est le Soleil seul qui fait tout. Une fois l'inclinaison de notre planchette trouvée, nous la fixons, et nous n'y touchons plus. Il ne s'agit pas d'un tour d'escamotage. C'est un *fait* cosmographique qui s'opère et que l'on observe.

Pour établir un cadran solaire qui donne ces résultats, on peut procéder

de la manière suivante. Nous prendrons celui de l'Observatoire de Juvisy (1) comme modèle.

Construisez un cadran solaire horizontal de 0<sup>m</sup>,20 environ de diamètre. Le style de ce cadran solaire est, naturellement, incliné suivant la latitude du lieu : il marque les heures et sert aux usages habituels, c'est là votre cadran solaire normal. Ne vous en préoccupez pas autrement.

Au centre, vissez une aiguille de 0<sup>m</sup>,20 de longueur environ, bien *perpendiculaire au plan du cadran*.

Au lieu de fixer ce cadran par ses quatre angles, montez-le à charnière, par son côté sud (le côté AB de la *fig. 104*) sur une plaque fixée au pied, plaque sur laquelle il est simplement rabattu lorsqu'il est horizontal.

Deux points sont maintenant à considérer. D'une part, il faut trouver l'inclinaison convenable pour que le phénomène se produise; d'autre part, cette inclinaison trouvée, il faut y fixer le cadran. Ces deux points seront réalisés en plaçant deux arcs de cercle divisés de 0° à 90° entre lesquels le cadran s'élèvera à volonté, et, en adaptant sur chaque côté une petite plaque latérale munie d'une vis dont le serrage maintiendra le cadran à l'inclinaison voulue.

Nous avons vu que le style doit être dirigé un peu au sud du Soleil à midi, de telle sorte que son ombre se projette au Sud. C'est dire que la déclinaison du style doit être inférieure de 3° à 4° à celle du Soleil.

Prenons, par exemple, le jour du solstice d'été, à Juvisy.

A cette date, la déclinaison du Soleil est de 23°  $\frac{1}{2}$ , celle du style sera donc de 20°.

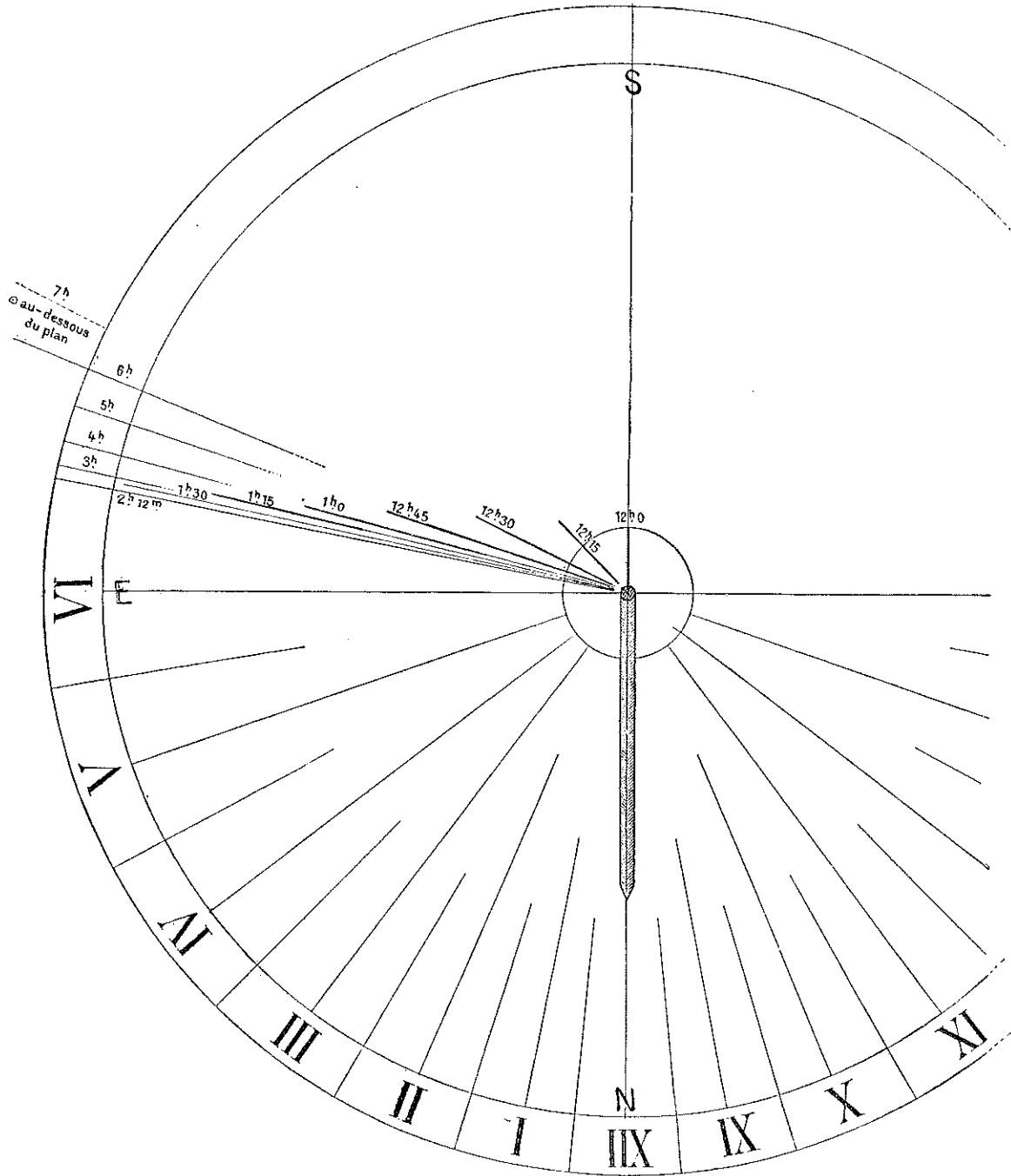
L'inclinaison du cadran sera celle de la latitude du lieu, moins la déclinaison du style, soit 48° 42' — 20°, soit 28° 22'. Une précision à un demi-degré près suffit.

Nous élevons donc notre cadran en le faisant tourner autour de sa charnière jusqu'à ce que son plan passe par 28°  $\frac{1}{3}$  au-dessus de la ligne horizontale de zéro des arcs de cercle. Comme il convient d'opérer à midi, on trouvera cette inclinaison, indépendamment des divisions gravées sur les arcs de cercle, tout simplement par l'ombre du style. Plus cette ombre à midi est courte, plus la rétrogradation est grande. Pour un style de 0<sup>m</sup>,20, il convient de prendre un ombre de 0<sup>m</sup>,01, à midi, et de fixer le cadran à cette inclinaison-là.

Cela fait, l'ombre s'éloigne de la ligne méridienne S N en se dirigeant vers

(1) Ce nouveau genre de cadran solaire, représenté *fig. 103*, a été construit par M. Molteni, l'ingénieur opticien qui a fait faire de si rapides progrès à l'art des projections.

Fig. 106.



Rétrogradation de l'ombre sur le cadran solaire.

l'Est et en s'allongeant. Au bout d'un certain temps, elle s'arrête. Puis elle revient sur ses pas et rétrograde jusqu'au coucher du Soleil.

Nous avons représenté (*fig. 105*) le plan du cadran solaire de Juvisy observé le jour du solstice d'été. Ce plan est de *grandeur naturelle* (on a supprimé, dans ce but, la partie de droite qui, du reste n'ajoutait rien à la démonstration).

Les lignes d'ombre sont tracées de quart d'heure en quart d'heure depuis midi jusqu'à 1<sup>h</sup>30<sup>m</sup> : elles sont dessinées à leurs positions *et à leurs longueurs* précises. A partir de 1<sup>h</sup>30<sup>m</sup> l'ombre continue à peine son cours ; elle avance encore un peu, mais pour rester stationnaire de 1<sup>h</sup>50<sup>m</sup> à 2<sup>h</sup>34. Le milieu de cet intervalle, soit 2<sup>h</sup>12<sup>m</sup>, représente l'heure de l'angle maximum.

Alors comme chacun peut s'en assurer, l'ombre forme un angle de 78<sup>o</sup>,7 avec la méridienne.

Dès lors, l'ombre rétrograde, tout en continuant de s'allonger. A 2<sup>h</sup>50<sup>m</sup> elle repasse par la ligne de 1<sup>h</sup>30<sup>m</sup> ; à 3<sup>h</sup>10, elle arrive vers celle de 1<sup>h</sup>15<sup>m</sup>, à 4 heures vers celle de 1 heure, à 5<sup>h</sup>10<sup>m</sup> vers celle de 12<sup>h</sup>45 et à 6 heures à la ligne où elle passait à 12<sup>h</sup>37<sup>m</sup>. Le Soleil se couche vers six heures pour le plan du cadran ; mais on peut suivre la rétrogradation plus longtemps en recevant l'ombre du style sur le cadre du cadran, s'il dépasse son plan, ou sur un écran perpendiculaire à ce plan. C'est ainsi que nous avons marqué la trace de l'ombre à sept heures, en dehors du cadran.

De 2<sup>h</sup>12<sup>m</sup> au coucher du Soleil, l'angle de rétrogradation est de 11<sup>o</sup>  $\frac{1}{2}$ . C'est un peu plus que la rétrogradation rapportée par la Bible (en supposant qu'ils aient eu la même division du cercle que nous).

Il convient de faire cette expérience dans les conditions précédentes et vers le solstice d'été ; parce qu'à cette époque la rétrogradation est à son maximum ; aux équinoxes elle est nulle.

De l'équinoxe d'automne à l'équinoxe de printemps, on ne peut pas observer toute la rétrogradation, parce que le Soleil se couche trop tôt.

Ces conditions se rapportent à notre hémisphère. Appliquées à l'hémisphère austral, elles sont de sens contraire.

Dans l'expérience précédente, faite au solstice d'été, notre cadran est parallèle à un cadran horizontal placé à 20<sup>o</sup> de latitude boréale, comme au sud de La Mecque, au nord de Bombay, ou au Tonkin, à Cuba (Santiago), à Mexico, Saint-Domingue, etc. Tout cadran solaire à style vertical placé horizontalement à cette latitude doit montrer la même rétrogradation. Tout cadran horizontal à style vertical observé entre les tropiques doit montrer une rétrogradation analogue pendant notre été pour les latitudes boréales et pendant l'été austral pour l'autre hémisphère. En thèse générale, la rétrogradation est d'autant plus grande que la déclinaison du Soleil est elle-même

plus grande et que la déclinaison du style se rapproche davantage de celle du Soleil. Il est singulier que l'on n'ait jamais remarqué le fait sous les tropiques; il faut croire qu'on n'a jamais eu la curiosité d'y observer un cadran solaire horizontal à style vertical.

Pour un cadran horizontal, la rétrogradation est nulle à l'équateur; elle augmente jusqu'au tropique, quand la déclinaison du Soleil est supérieure à la latitude du lieu. Au delà, elle est de nouveau nulle; mais pour la produire il suffit d'incliner le cadran sur l'horizon d'une quantité égale à la latitude du lieu, *moins* la déclinaison du style lorsque le Soleil est dans le même hémisphère, et de cette latitude, *plus* la déclinaison du style quand il est dans l'hémisphère opposé; dans ce dernier cas, la rétrogradation n'est pas complète, le Soleil disparaissant de l'horizon du lieu avant de s'abaisser au-dessous de celui du cadran.

Tout ce qui vient d'être dit pour la marche de l'ombre dans l'après-midi s'applique en sens contraire aux heures de la matinée; nous aurions pu tracer sur le cadran des lignes symétriques du lever du soleil à 9<sup>h</sup>48<sup>m</sup>, et de cette station jusqu'à la progression rapide de midi; mais pour plus de simplicité et plus de clarté, nous nous en sommes tenu à l'inscription du mouvement à partir de midi.

Maintenant, le cadran solaire d'Achaz était-il analogue à celui que nous venons de décrire? L'hypothèse est plausible. Achaz, père d'Ezéchias, roi de Juda, régnant à Jérusalem, avait des astrologues dans sa cour, comme Ezéchias et comme Josias, son petit-fils: il suffit de lire le « Livre des Rois » pour sentir combien l'astrologie était alors intimement liée à la religion et quels rôles jouaient les astrologues et les prêtres. Presque à chaque règne on les extermine pour les remplacer! Achaz « sacrifia sur les hauts lieux » selon l'expression de la Bible. Son petit-fils Osias « détruisit les autels qui étaient sur la terrasse de la chambre d'Achaz » (*Rois*, IV, 23). « Il extermina aussi les augures, qui avaient été établis par les rois d'Israël pour sacrifier sur les hauts lieux dans les villes de Juda et autour de Jérusalem, et ceux qui offraient de l'encens à Baal, au Soleil, à la Lune, aux douze signes et à toutes les étoiles du ciel. »

On ne saurait être plus explicite, et il n'y a rien de surprenant à ce que les prophètes eux-mêmes aient combiné certains phénomènes célestes de façon à agir sur l'esprit des princes et à les ramener dans le droit chemin. Aujourd'hui même on en voit bien d'autres en politique.

Pour faire rétrograder l'ombre de 10°, il faut donner au style une inclinaison de 18°25'. A Jérusalem, dont la latitude est de 31°46', le cadran doit être incliné sur l'horizon de 31°46' — 18°25' soit de 13°21'.

Quoi qu'il en soit, il nous a paru intéressant d'établir dans notre nouvel



observatoire un cadran solaire à rétrogradation et d'en offrir à nos lecteurs la description prise sur nature.

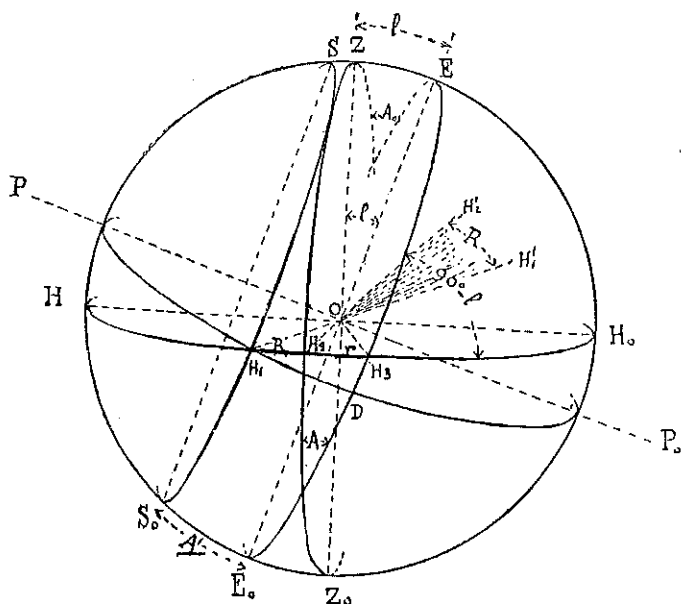
CAMILLE FLAMMARION.

P. S. — Nos lecteurs mathématiciens ou géomètres trouveront ci-dessous la théorie, les formules et les épures, que M. le colonel Guillemin a bien voulu rédiger spécialement pour l'*Astronomie*.

THÉORIE, FORMULES ET ÉPURES DE LA RÉTROGRADATION DE L'OMBRE.

Soit *fig. 106* une sphère céleste ayant son centre en O;  $HH_0$  : plan horizontal; en O : style vertical dont le zénith est en Z;  $PP_0$  : ligne des pôles;  $EE_0$  : plan de l'équateur;  $SS_0$  parallèle décrit par le Soleil;  $ZH_1Z_0$  : plan vertical tangent au

Fig. 106.



parallèle solaire, (soit plan de l'écliptique aux solstices), dans lequel pourra toujours se trouver le style.

$PH_1DP_0$  : méridien passant par le point d'intersection  $H_1$  du plan horizontal avec le parallèle solaire.

$\Delta, \Delta_0, \Delta'$  = déclinaison du Soleil.

$l$  = déclinaison du style.

$H_1OH_1'$  = direction de l'ombre au lever du Soleil.

$\Pi_2 O H'_2$  = direction de l'ombre au moment de son plus grand écart du méridien.

$\Pi O H_2$  = azimut maximum de l'astre.

$R$  = angle de rétrogradation = arc  $\Pi_1 \Pi_2$ .

$r$  = arc  $\Pi_2 H_3$  compris entre les intersections de l'écliptique et du plan de l'équateur avec le plan horizontal.

$r$  est le complément de l'azimut maximum du Soleil.

$(R + r)$  = arc  $\Pi_1 H_3$ , compris entre les intersections du parallèle solaire et de l'équateur avec le plan horizontal.

*Détermination de  $(R + r)$ .*

Considérons le triangle  $\Pi_1 D H_3$  rectangle en  $D$ , le côté  $\Pi_1 D = A$  = déclinaison du Soleil, l'angle opposé =  $90^\circ - l$  = complément de la déclinaison du style.

On a, d'après les formules trigonométriques connues :

$$(1) \quad \sin(R + r) = \frac{\sin A}{\sin(90^\circ - l)} = \frac{\sin A}{\cos l}.$$

*Détermination de  $r$ .*

Considérons le triangle  $\Delta H_2 H_3$ , rectangle en  $H_2$ . — Les angles  $A$  et  $(90^\circ - l)$  sont connus et l'on a :

$$(2) \quad \cos r = \frac{\cos A}{\sin(90^\circ - l)} = \frac{\cos A}{\cos l}.$$

*Observation.* — La formule (2) permet de déterminer la latitude d'un lieu quelconque, en observant l'azimut maximum d'une étoile dont la déclinaison est connue et supérieure à la latitude du lieu d'observation.

Soit  $\theta$ , l'azimut maximum observé,  $\cos r = \sin \theta$  d'où :

$$\cos l = \frac{\cos A}{\sin \theta}.$$

Cette formule présente l'avantage d'être indépendante de la réfraction.

Il faut choisir une étoile dont la déclinaison ne soit pas trop supérieure à la latitude du lieu d'observation, sinon on est exposé à de grandes variations de  $l$ , par de petites de  $r$ .

*Formule générale donnant directement la valeur de  $R$ .*

$R$  étant égal à  $(R + r) - r$ , on a :

$$(3) \quad \begin{aligned} \sin R &= \sin(R + r) \cos r - \cos(R + r) \sin r, \\ \sin(R + r) &= \frac{\sin A}{\cos l}, & \cos(R + r) &= \frac{\sqrt{\cos^2 l - \sin^2 A}}{\cos l}, \\ \cos r &= \frac{\cos A}{\cos l}, & \sin r &= \frac{\sqrt{\sin^2 A - \sin^2 l}}{\cos l}. \end{aligned}$$

En remplaçant les sinus et les cosinus par leurs valeurs :

$$\begin{aligned} \sin R &= \frac{\sin A \cos A}{\cos^2 l} - \frac{\sqrt{(\cos^2 l - \sin^2 A)(\sin^2 A - \sin^2 l)}}{\cos^2 l}, \\ \sin R &= \frac{\sin A \cos A}{\cos^2 l} - \frac{\sqrt{\sin^2 A \cos^2 A - \sin^2 l \cos^2 l}}{\cos^2 l}, \end{aligned}$$

$$(4) \quad \sin R = \frac{\sin 2A - \sqrt{\sin^2 2A - \sin^2 2l}}{2 \cos^2 l}$$

Il est en général plus simple de calculer les valeurs de R, au moyen des formules (1) et (2) et en faisant la différence  $(R + r) - r = R$ .

TABLEAU DES VALEURS DE R,  
au solstice d'été et pour les différentes déclinaisons du style.

<i>l</i>	(R + <i>r</i> )	<i>r</i>	R
0°	23°.28'	23°.28'	0°.00'
2°	23°.29'	23°.23'	0°.06'
4°	23°.32'	23°.09'	0°.23'
6°	23°.36'	22°.44'	0°.52'
8°	23°.43'	22°.08'	1°.35'
10°	23°.51'	21°.20'	2°.31'
12°	24°.01'	20°.19'	3°.42'
14°	24°.14'	19°.02'	5°.12'
16°	24°.28'	17°.24'	7°.04'
18°	24°.45'	15°.19'	9°.26'
20°	25°.04'	12°.32'	12°.32'
22°	25°.26'	8°.23'	17°.03'
23°.28'	25°.44'	0°.00'	25°.44'

A = 23°.28'

TABLEAU DES VALEURS DE R,  
pour différentes déclinaisons du Soleil, la différence (A - *l*) des déclinaisons  
du Soleil et du style étant constante et égale à : 3°.28'.

	(R + <i>r</i> )	<i>r</i>	R
A = 7°.28' } l = 4°	7°.29'	6°.19'	1°.10'
A = 11°.28' } l = 8°	11°.35'	8°.15'	3°.20'
A = 15°.28' } l = 12°	15°.49'	9°.50'	5°.59'
A = 19°.28' } l = 16°	20°.17'	11°.14'	9°.02'
A = 23°.28' } l = 20°	25°.04'	12°.32'	12°.32'

## L'ASTRONOMIE.

TABLEAU DES VALEURS MAXIMA DE R,  
pour différentes déclinaisons du Soleil.

$$A = l$$

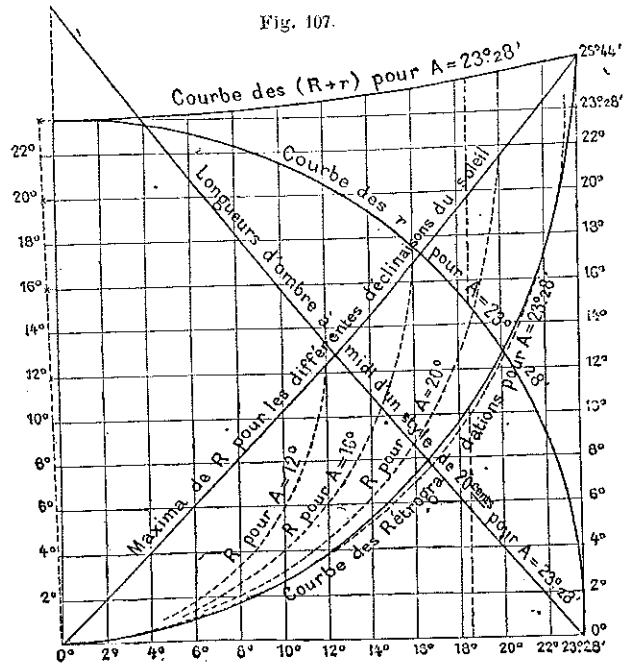
$$\sin(R+r) = \frac{\sin A}{\cos A}, \quad \cos r = \frac{\cos A}{\cos A}$$

$$\sin R = \text{tang } A :$$

A	R
0°	0°
4°	4°. 41'
8°	8°. 05'
12°	12°. 16'
16°	16°. 40'
20°	21°. 21'
23°. 28'	25°. 44'

La longueur d'ombre à midi est égale à 0.

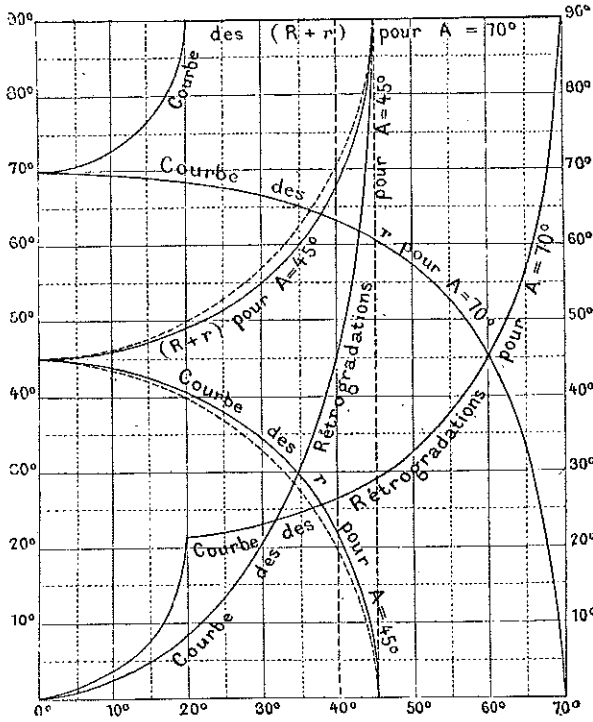
La fig. 107 représente les différentes courbes :



Les déclinaisons  $l$ , se mesurent sur l'abscisse, et les angles de rétrogradation  $R$ , sur les ordonnées.

La courbe des  $R$  a été tracée en prenant les différences des ordonnées de la courbe des  $(R+r)$  et de celle des  $r$ . On voit dans la courbe des  $R$ , pour  $A = 23^{\circ}28'$ , qu'elle diffère très peu du cercle qui a été tracé en pointillé. Les autres courbes

Fig. 108.



pour des déclinaisons  $A = 20, 16, 12^{\circ}$ , sont simplement tracées avec des arcs de cercles, raccordés à la courbe des maximum par des tangentes.

Les longueurs d'ombre sont représentées en vraie grandeur pour un style de  $0^m, 20$ ; elles se mesurent sur les ordonnées, au moyen d'une échelle métrique.

*Projection verticale.*

Au centre de la sphère céleste  $O$  s'élève un style vertical, dont le zénith est en  $Z$ .

$HH_0$  = trace du plan horizontal.

$OE$  = trace du plan de l'équateur.

$PP_0$  = ligne des pôles — axe.

$SK$  = trace du parallèle décrit par le Soleil.

$KNTS$  = rabattement du plan  $KS$ , divisé en heures indiquées en chiffres romains.

L'angle  $SOE = A$  = déclinaison du Soleil.

L'angle  $ZOE = l$  = déclinaison du style.

$\alpha$  = angle horaire (compté à partir du méridien) du plus grand écart de l'ombre.

$\beta$  = angle horaire (compté à partir de  $6^h$ ), du lever au coucher du Soleil.

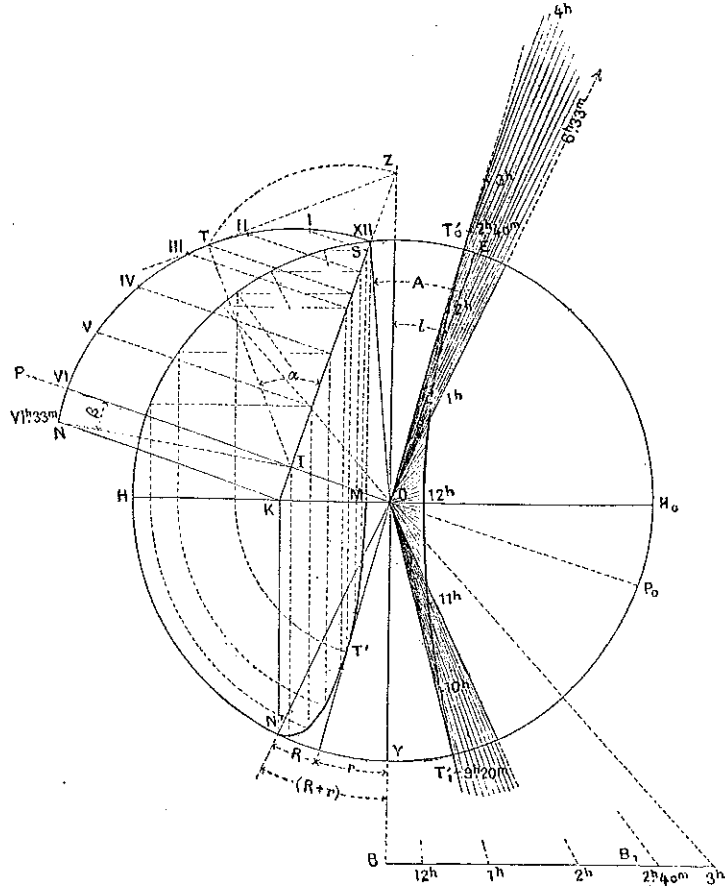
*En projection horizontale :*

$III_0$  est la trace du plan méridien.

$MT'N'$  = projection de l'arc SK décrit par le Soleil au-dessus de l'horizon.

$T'OT'_0$  = trace du plan vertical tangent à la projection  $N'T'M$  de SK.

Fig. 109.



$N'O$ , direction du rayon lumineux au coucher du Soleil, et dont le prolongement indique la direction de l'ombre.

$T'_1 12^h T'_0 \dots 4^h$  = trace de l'ombre de l'extrémité d'un style vertical. — Les heures sont indiquées en chiffres arabes.

$BB_1 \dots$  indique les longueurs d'ombre aux différentes heures, à partir de B, et pour un style dont la vraie grandeur serait =  $OB$ .

L'aire du plan horizontal balayée par l'ombre du style est teintée en noir. La partie balayée deux fois est plus foncée.

La ligne  $O 12^h$ , prolongement de  $MO$  indique la direction et la grandeur d'ombre à midi. Celle-ci s'écarte peu à peu du méridien jusqu'en  $OT'_0$  prolongement

de T'O, tangent à l'ellipse N'T'O. Dès lors, l'ombre se rapproche du méridien jusqu'à ce qu'elle ait prit la direction du prolongement de N'O. N' étant le lieu du Soleil au moment où il s'abaisse au-dessous de l'horizon du cadran.

$$\begin{aligned} A &= 23^{\circ}28' \quad l = 18^{\circ}25' \\ &\text{(solstice)} \\ R &= 10^{\circ}. \end{aligned}$$

Commencement de la rétrogradation après midi

$$\begin{aligned} \alpha &= 2^{\text{h}}40^{\text{m}}, \quad \beta = 0^{\text{h}}33^{\text{m}}. \\ \text{Coucher du Soleil} &= 6^{\text{h}}33^{\text{m}}. \end{aligned}$$

*Expérience du 11 août 1881, faite par M. Camille Flammarion  
à Lausanne (fig. 110).*

$$A = 15^{\circ}10' \quad l = 12^{\circ},$$

longueur d'ombre à midi, la longueur du style étant de 0<sup>m</sup>,20 :

$$\text{tang}(A - l) = \text{tang}3^{\circ}10' = 0,055 \times \text{longueur du style}$$

$$\text{longueur d'ombre} = 0,055 \times 20 = 1^{\text{cm}},1.$$

Inclinaison du cadran sur l'horizon :

$$\begin{aligned} \text{Latitude de Lausanne} &= 46^{\circ}31'. \\ \text{Inclinaison} &= 46^{\circ}31' - 12^{\circ} = 34^{\circ}31'. \end{aligned}$$

Rétrogradation de l'ombre :

$$\begin{aligned} \sin(R + r) &= 0,26747 \\ \cos r &= 0,98673 \\ (R + r) &= 15^{\circ}31', \quad r = 9^{\circ}21' \\ (R + r) - r &= R = 6^{\circ}10'. \end{aligned}$$

Commencement de la rétrogradation après midi :

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\text{tang}12^{\circ}}{\text{tang}15^{\circ}10'} = 0,78415 \\ \alpha &= 38^{\circ}21' = 2^{\text{h}}33^{\text{m}}. \end{aligned}$$

Coucher du Soleil pour le cadran :

$$\begin{aligned} \sin \beta &= 0,05365 \\ \beta &= 3^{\circ} + 4' \text{ à } 5' = 12^{\text{m}}. \\ &= 6^{\text{h}}42^{\text{m}}. \end{aligned}$$

La trace de l'ombre de l'extrémité du style de 0<sup>m</sup>,20, tel qu'il a servi pendant l'expérience, est indiquée en ligne -----; tandis que la trace de l'ombre figurée dans l'épure est celle d'un style égal à OB = 0<sup>m</sup>,5.

$$\begin{aligned} A &= 70^{\circ} \quad l = 40^{\circ} \\ R &= 26^{\circ}31' \\ \alpha &= 4^{\text{h}}49^{\text{m}}. \end{aligned}$$

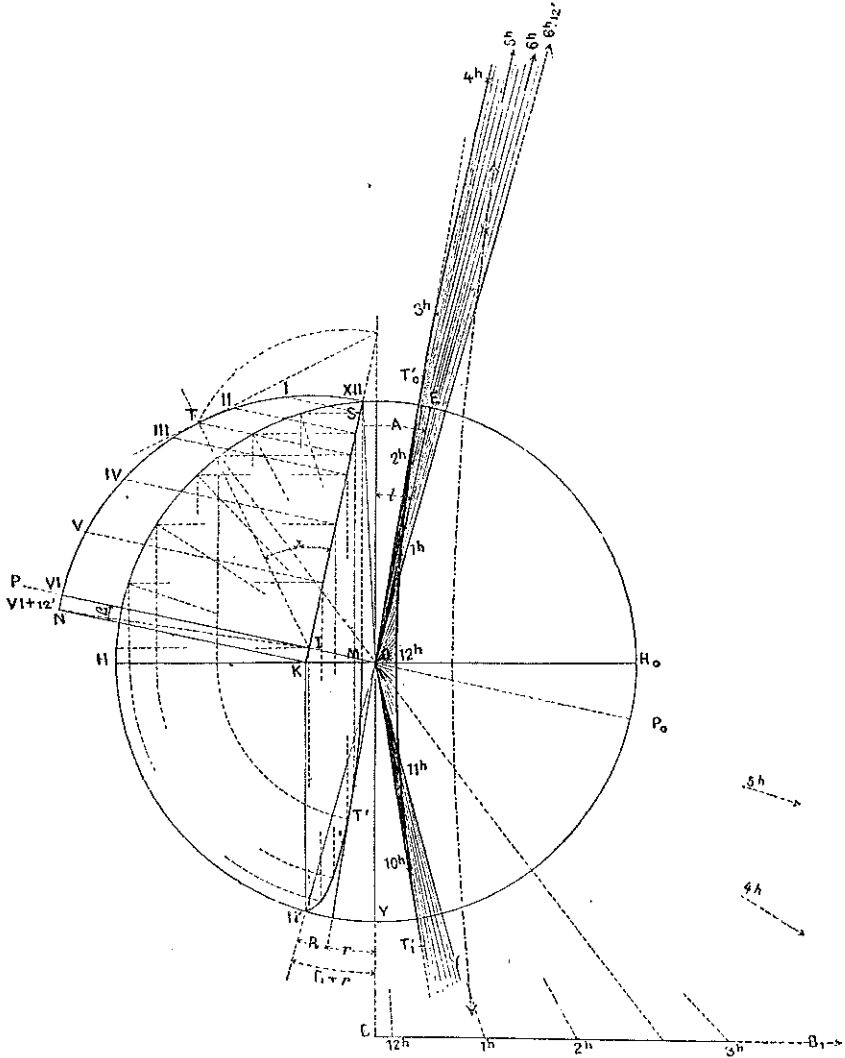
Le Soleil ne disparaît pas de l'horizon et la direction de l'ombre est la même à midi et à minuit.

$$A = 45^\circ \quad l = 45^\circ.$$

$$A = l,$$

$$\sin(R + r) = \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A = 1$$

Fig. 110.



$$\cos(R + r) = 0, \quad \cos r = \frac{\cos A}{\cos A} = 1, \quad r = 0.$$

$$\sin R = \cos r = 1$$

$$90^\circ.$$



On remarque ici, que la rétrogradation est continue, l'ombre faisant un angle droit avec le méridien immédiatement avant et après midi.

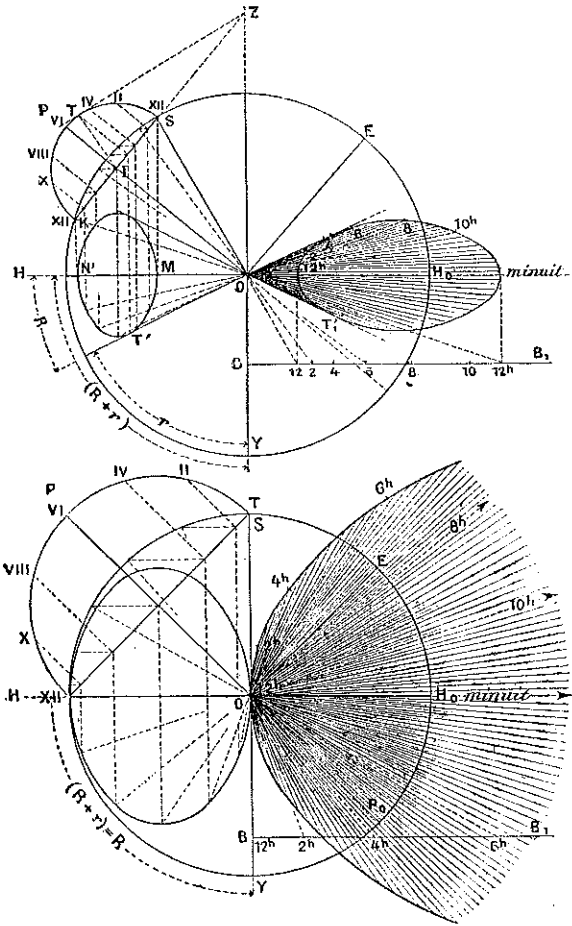
*Détermination des heures du commencement et de la fin de la rétrogradation.*

Soit  $e$  = rayon de l'arc STPN décrit du centre I (parallèle solaire)

$$e = IS = OD = \cos A$$

$$\sec \alpha = \frac{ZI}{e} = \frac{ZI}{\cos A}$$

Fig. 111.



ZI, considéré comme faisant partie du triangle,

$$ZIO = OI \cotg l;$$

mais

$$OI = DS = \sin A.$$

Donc :

$$ZI = \sin A \cotg l$$

et

$$\sec z = \frac{ZI}{e} = \frac{\sin A}{\cos A} \cotg l = \tan A \cotg l,$$

on a aussi :

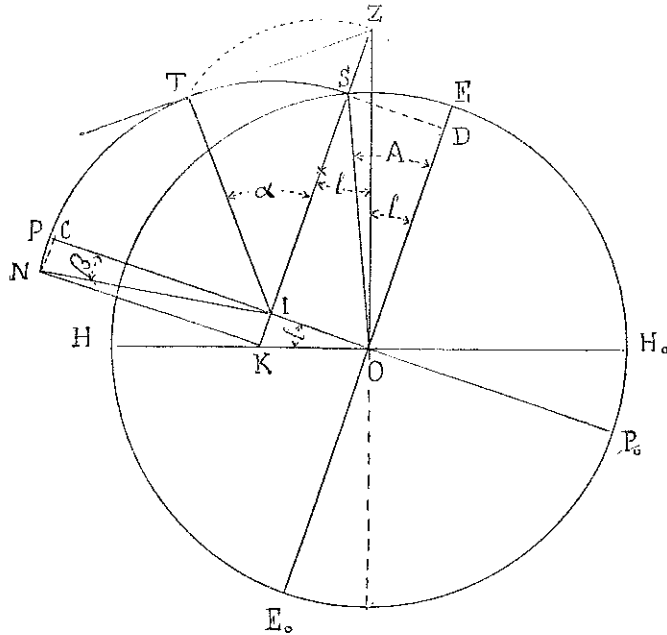
$$\sec z = \frac{I}{\cos \alpha},$$

$$\cos z = \frac{I}{\tan A \cotg l},$$

(5)

$$\cos z = \frac{\tan l}{\tan A}$$

Fig. 112.



égal heure de l'azimut maximum, en réduisant les degrés en minutes, et en divisant par 15, pour avoir des minutes de temps.

*Heure du lever et du coucher du Soleil pour le plan du cadran.*

$$\sin \beta = \frac{NG}{e} = \frac{KI}{e} = \frac{KI}{\cos A}$$

$$KI = OI \tan l = \sin A \tan l$$

$$\sin \beta = \frac{KI}{e} = \frac{\sin A}{\cos A} \tan l$$

(6)

$$\sin \beta = \tan A \tan l.$$

L'heure du commencement de la *rétrogradation* à partir de la ligne méridienne et de midi est donnée par la formule

$$\cos z = \frac{\tan l}{\tan A},$$

dans laquelle  $l$  représente la déclinaison du style, et  $A$  la déclinaison du Soleil.

Dans l'exemple du texte, (Juvisy), solstice d'été, on a

$$\cos \alpha = \frac{\text{tang } 20^\circ}{\text{tang } 23^\circ 28'} = 0.92346 = 33^\circ 1' 35'' = 2^\circ 12''.$$

Dans l'expérience faite à Lausanne, le 11 août 1881, on a

$$\cos \alpha = \frac{\text{tang } 12^\circ}{\text{tang } 15^\circ 10'} = 0.89439 = 38^\circ 21' = 2^\circ 33''.$$

La valeur de la rétrogradation peut se calculer par la formule suivante :

Soit  $A$  = déclinaison du Soleil.

$l$  = déclinaison du style en latitude géographique du lieu pour lequel le cadran serait horizontal.

$R$  = angle de rétrogradation de l'ombre, les valeurs de  $R$  peuvent être calculées en fonction de  $l$  et de  $A$  :

$$\sin R = \frac{\sin 2A - \sqrt{\sin^2 2A - \sin^2 2l}}{2 \cos^2 l}.$$

En mettant  $\sin 2A$  en facteur commun et en faisant

$$\frac{\sin 2l}{\sin 2A} = \sin \varphi$$

la formule devient

$$\sin R = \frac{\sin 2A \sin^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos^2 l},$$

si l'on suppose

$$l = 0^\circ, \text{ on a } R = 0^\circ$$

$$l = A, \text{ on a } \sin R = \text{tang } A.$$

Au solstice d'été

$$\sin R = \text{tang } 23^\circ 28'$$

$$R = 25^\circ 44'.$$

Tel est l'angle maximum décrit par l'ombre du style pendant son mouvement de rétrogradation.

L'heure du lever et du coucher du Soleil pour le plan du cadran est donnée par la formule

$$\sin \beta = \text{tang } A \text{ tang } l.$$

$$\text{Lever du Soleil} = 6^h + \frac{\beta}{15}.$$

$$\text{Coucher du Soleil} = 6^h + \frac{\beta}{15}.$$

$$\text{Durée du jour} = 12^h + \frac{\beta}{15}.$$

*Exemple.* — Calcul du plus long jour de l'année, à Paris :

$$\begin{aligned} \Delta &= 23^{\circ}28' \quad l = 48^{\circ}50' \\ \text{tang } \Delta &= 0.43412 \\ \text{tang } l &= 1.14363 \\ \sin \beta &= 0.49647 \\ \beta &= 29^{\circ}46' \\ 2\beta &= 59^{\circ}32' = 3372' \\ \frac{3372}{15} &= 224^{\text{m}} = 3^{\text{h}}58^{\text{m}} \\ \text{Durée du jour} &= 12^{\text{h}} + 3^{\text{h}}58^{\text{m}} = 15^{\text{h}}58^{\text{m}} \\ \text{Réfraction} &= 9^{\text{m}} \end{aligned}$$

Durée totale du jour du lever au coucher du Soleil = 16<sup>h</sup>7<sup>m</sup>.

A l'aide de ces formules et des épures, nos lecteurs ont maintenant entre les mains toute la théorie du cadran solaire à rétrogradation.

ETIENNE GUILLEMIN.  
Colonel du génie, à Lausanne.

## L'ÉPOQUE GLACIAIRE ET LES ANCIENS GLACIERS DES ALPES.

Pour le touriste, si fier d'atteindre sur nos Alpes ces masses immenses de glace, devant lesquelles il est saisi d'admiration et d'effroi, l'étonnement serait bien plus grand encore s'il pouvait se représenter l'étendue et le volume gigantesques de ces glaciers au commencement de l'époque quaternaire.

La Science nous explique parfaitement aujourd'hui ce phénomène, au moyen des données les plus positives déduites de l'observation des faits anciens, comparés avec ceux qui s'opèrent journellement autour de nous.

Les glaciers anciens, comme les glaciers actuels, ont laissé partout des traces de leur passage, et un rapide coup d'œil jeté sur la longue chaîne des Alpes et dans les vallées qui s'ouvrent à leur pied, suffit pour nous montrer le développement de ces mers de glace et les espaces parcourus qui, pour quelques-unes, ont été de plus de 400<sup>km</sup>.

Il faut se représenter, avant tout, les cimes de nos montagnes beaucoup plus élevées qu'elles ne le sont actuellement. L'une des dernières oscillations du sol, vers le déclin de l'époque tertiaire avait achevé l'exhaussement le plus important de notre système de montagnes. Le calcul du volume des roches que les courants fluviaux et surtout glaciaires ont arrachées à ces sommets pour aller combler au loin de profondes vallées, donnerait à ces monts une élévation que l'on a évaluée le double de celle qu'ils présentent actuellement.

L'origine des anciens glaciers a été attribuée à des causes multiples. La précession des équinoxes, le plus ou moins d'excentricité de l'ellipse ter-