UNA MERIDIANA TRIFILARE

BERNARD ROUXEL

ESTRATTO

Viene studiato un nuovo genere di meridiana costituita da tre fili paralleli ad un piano. Le ombre di questi tre fili formano un triangolo. Si dimostra che con una corretta disposizione dei fili e del piano, le tre linee d'ombra si incontrano in un punto H a mezzogiorno (e solo a mezzogiorno) per ogni giorno dell'anno. Il punto H cambia ogni giorno e si muove lungo una linea retta che può essere graduata con le date.

1 – Un Esempio.

Consideriamo un sistema di riferimento ortogonale Oxyz e sei punti A_1, A_2, A_3, A'_1, A'_2, A'_3 le cui coordinate sono:
$A_1(-a,-b,3)$, $A_2(0,-b,2)$, $A_3(a,-b,1)$,
$A'_1(a,b,3)$, $A'_2(0,b,2)$, $A'_3(-a,b,1)$. (nota 1)

Siano D_1, D_2, D_3 rispettivamente le rette $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, A_3, A'_3. (vedi Fig. 1)

Le equazioni di queste rette sono:

$$D_1 : (ay - bx = 0, z = 3)$$
$$D_2 : (x = 0, z = 2)$$
$$D_3 : (ay + bx = 0, z = 1)$$

Le ombre di D_1, D_2, D_3 si incontrano su un punto del piano xOy solo se esiste un raggio solare D che interseca contemporaneamente le rette D_1, D_2, D_3.
Le equazione generica di D è:

$$D : (x = p + mt,\ y = q + nt,\ z = t)$$

dove (m,n,1) è la direzione di D e (p,q) sono le coordinate dell'intersezione di D con xOy.
La condizione di intersezione tra D e ciascuna delle tre rette può essere trovata facilmente e si ottiene:

tra D e D_1:

$$aq+3an-bp-3bm=0$$

tra D e D_2:

$$p+2m=0$$

e tra D e D_3:

$$aq+an+bp+bm=0$$

Da queste tre condizioni si deduce che:

$$n = 0,\ p = -2m,\ q = \frac{b}{a}m$$

L'equazione generale di una retta D che incontra D_1, D_2, D_3 è quindi:

$$\begin{cases} x = -2m + zm \\ y = \dfrac{b}{a}m \end{cases}$$

dove m è un parametro arbitrario.

Queste rette generano una superficie rigata P la cui equazione (ottenuta eliminando m) è:

$$bx + 2ay - azy = 0$$

P è un paraboloide iperbolico.

Possiamo vedere che le rette D che incontrano D_1, D_2, D_3 appartengono a piani paralleli al piano xOz e possono avere una pendenza arbitraria.

Quindi se si pone il piano xOz sul piano meridiano, le ombre dei tre fili si intersecano in un punto H, qualunque sia la superficie di incidenza. Per esempio se la superficie è il piano xOy troviamo che il punto H descrive una porzione di una linea retta Δ.
L'equazione di Δ è:

$$\Delta : (z = 0, bx + 2ay = 0)$$

Se si considera un altro piano si ottiene una parabola o un'iperbole.
Per superfici come la sfera o il cilindro si ottengono curve di grado 3 o 4.
Sulle fotografie di Fig.2 e Fig.3, allo scopo di avere maggiori simmetrie, si è posto xOz sul piano meridiano e Ox parallelo all'asse terrestre.

2 – Considerazioni geometriche.

L'origine di questa configurazione geometrica risiede nelle proprietà classiche delle superfici quadriche.

"L'iperboloide ad una falda e il paraboloide iperbolico possono essere generati in due distinti modi da una retta che si muove in modo da intersecare sempre tre rette mutuamente sghembe".

La prima enunciazione di questo teorema sembra dovuta a Monge (1) (2).
Quando le tre rette sono parallele ad un piano si ottiene un paraboloide iperbolico P.
In questo caso c'è un altro teorema che afferma che le rette delle due famiglie sono (per ciascuna famiglia)

[1] Si noti che i punti A_1, A_2, A_3 e A'_1, A'_2, A'_3 sono rispettivamente collineari a due rette parallele al piano xOz.

parallele ad un piano. Perciò quando si è considerato A_1, A_2, A_3 e A'_1, A'_2, A'_3 (giacenti su due linee rette) e D_1 , D_2, D_3, si era sicuri che la superficie generata dalle rette intersecanti D_1, D_2 , D_3 sarebbe stata un paraboloide iperbolico e che la famiglia dei raggi sarebbe stata parallela a xOz perché A_1,A_2,A_3 e A'_1,A'_2,A'_3 sono due rette parallele a xOz.
Inoltre: D_1, D_2, D_3 appartengono all'altra famiglia di rette di P, quindi l'intersezione di qualunque piano parallelo a queste rette fornisce un'altra retta di questa famiglia, e perciò Δ è una retta che contiene le le intersezioni δ, δ' di A_1A_3 e $A'_1A'_3$ con xOy.

Bibliografia:

(1) Monge "Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoïde" Journal de l'Ecole Polytechnique. Vol.1,1794,199.

(2) Monge "Géométrie descriptive" Paris, 1795

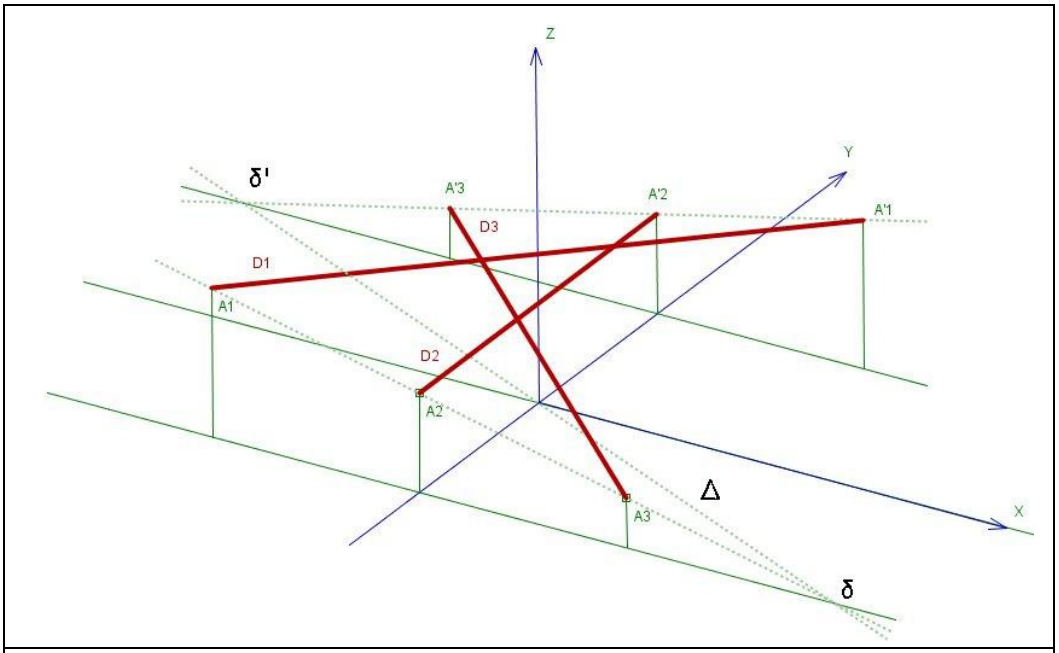

Fig.1 – Schema di disposizione dei tre fili

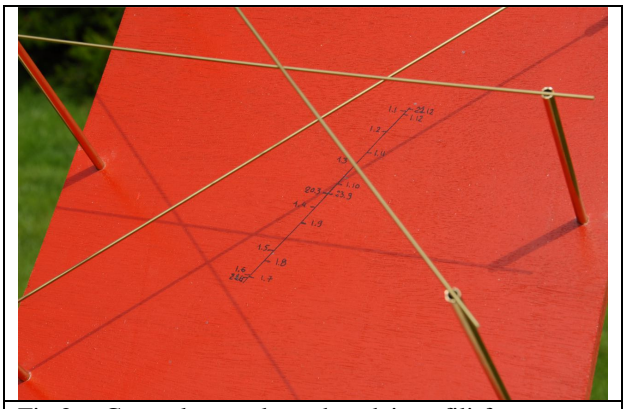

Fig.2 – Generalmente le ombre dei tre fili formano un triangolo

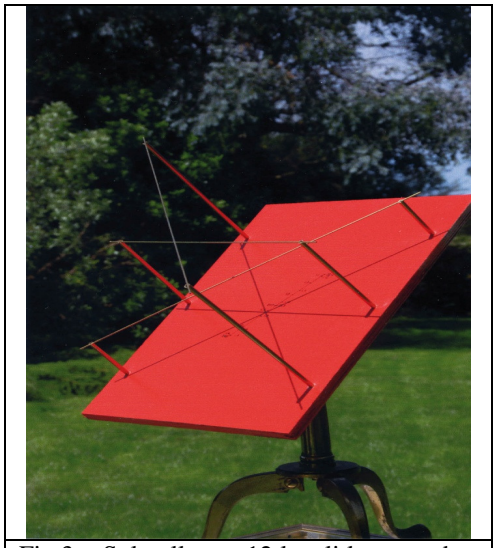

Fig.3 – Solo alle ore 12 locali le tre ombre si incontrano in un punto.