UN CADRAN SOLAIRE INDEPENDANT de la LATITUDE

« Le CADRAN TRIANGULAIRE »

Jean-François Echard

Octobre 2005

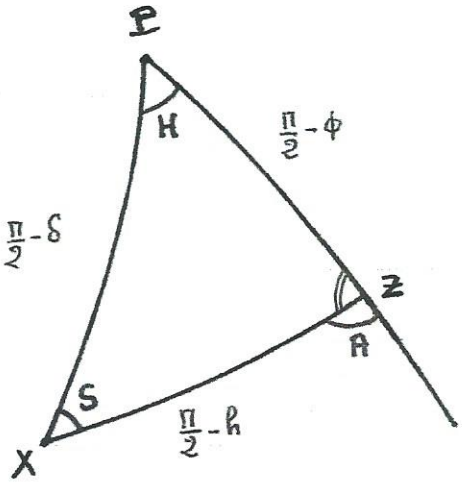
Cadran solaire indépendant de la latitude : cadran de FREEMAN

Introduction :

J.G. Freeman présente dans son article paru en 1978 (Astron. Soc. Can., vol. 72, No 2) un cadran original qui ne dépend pas du paramètre de latitude φ.

Dans le triangle sphérique fondamental défini par trois points : le soleil :X, le zénith :Z, le pôle nord :P sont associés quatre angles :

L'altitude du soleil :	h
La déclinaison (indiquant la date):	δ
L'azimut du soleil :	A
L'heure solaire :	H



Soit ϕ le paramètre de latitude du lieu d'observation

Sur le triangle sphérique XZP :

les angles sont en : Z : π-A ;
P : H
X : S

les côtés sont : XP : $\pi/2-\delta$
PZ : $\pi/2-\phi$
XZ : $\pi/2$-h

Remarquons que tous les angles et côtés sont mesurables par l'observateur sauf l'angle S.

Un cadran solaire est un instrument qui permet de résoudre élégamment une équation du triangle sphérique. En particulier l'équation donnant l'heure H et aussi la date. Les relations de base du triangle sphérique sont les suivantes :

$$\sin h = \sin\phi.\sin\delta + \cos\phi.\cos\delta.\cos H$$

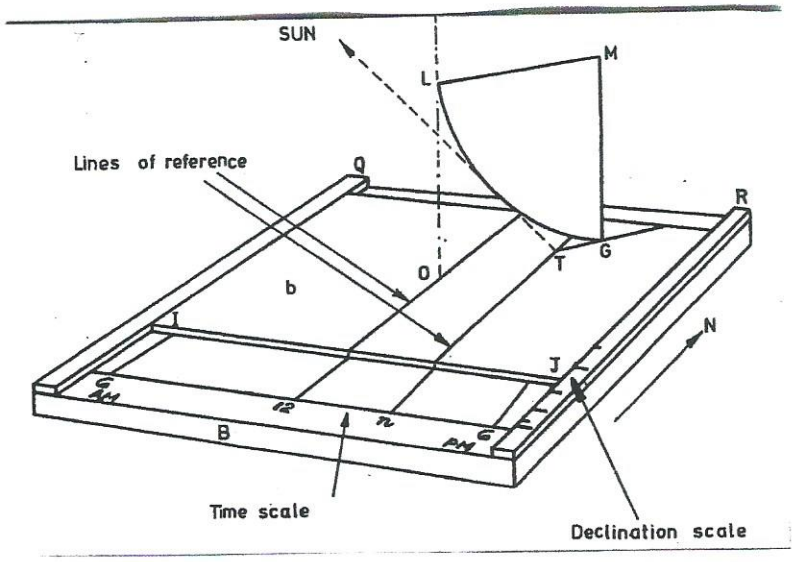
$$\sin \delta = \sin\phi.\sinh - \cos\phi.\cosh.\cos A$$

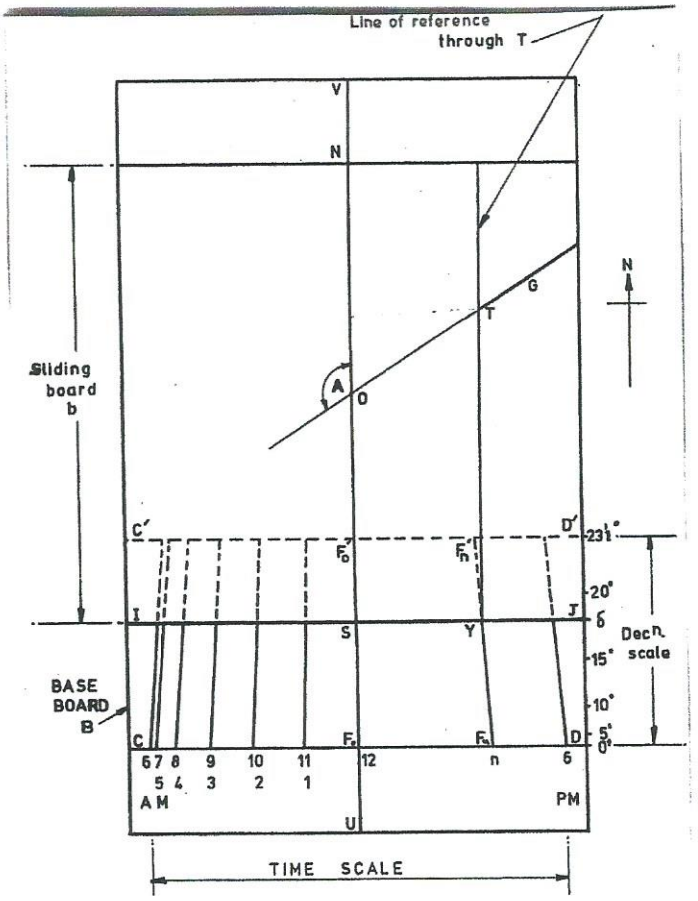
$$\mathrm{tg}\, A = \sin H / (\cos\phi.\cos H - \cos\phi.\mathrm{tg}\delta)$$

$$\sin A.\cosh = \cos\delta.\sin H$$

Dans tous les cas il suffit de trois paramètres sur quatre pour déterminer la variable recherchée, en particulier l'heure H.
Le paramètre de latitude figure dans les trois premières relations et non dans la quatrième.
Un cadran solaire indépendant de la latitude du lieu va donc utiliser la quatrième relation.

Cadran de FREEMAN :





Principe de fonctionnement :

Le cadran est placé sur un plan horizontal et est orienté selon le méridien du lieu. La base où figurent les heures est tournée vers le sud.

Le gnomon tourne autour d'un pivot vertical de centre O et est orienté vers le soleil. Un rayon du soleil va être tangent au gnomon et l'ombre portée du gnomon correspond au segment de droite TG . Le prolongement de TG passe par O. La parallèle à l'axe de symétrie SON du cadran, passant par T coupe le bord inférieur du cadran en Y. L'angle TON en O correspond à l'azimut du soleil A .

Le cadran peut être déplacé entre deux glissières sur le bâti horizontal. La droite TY rencontre une courbe Fn tracée sur le bâti. Cette courbe est représentative des heures H modulées par la déclinaison ou la date : δ.
La lecture de l'heure s'obtient en :

- Faisant glisser la cadran de façon que le bord sud coïncide avec la date (δ) tracée sur la glissière.
- Orientant le gnomon vers le soleil
- Déterminant l'intersection de la droite TY avec une courbe Fn

La courbe Fn sélectionnée indique l'heure H à la date donnée (δ).

Forme du gnomon et calcul de l'heure.

Forme du gnomon :

Le segment SY est égal à la projection de OT sur la base du cadran.

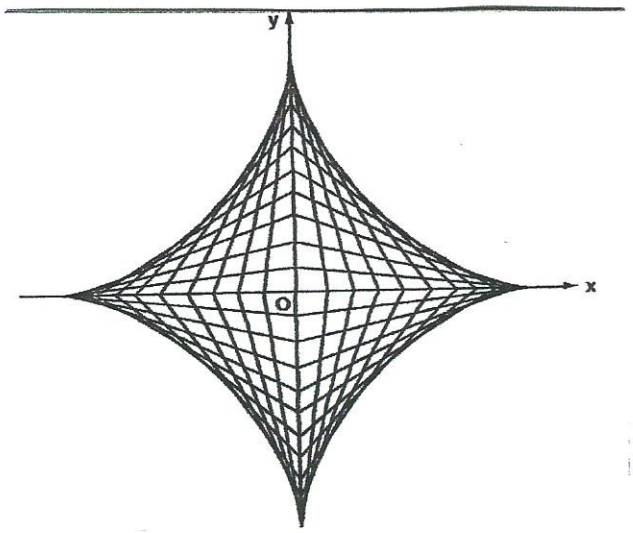
$$SY = OT.\ \sin A$$

OT est la projection horizontale sur le cadran du segment de droite KUT compris entre l'axe vertical du gnomon (K) et le point d'impact (T) du rayon du soleil tangent au gnomon en U. La pente de ce segment de droite est égale à la hauteur du soleil : h. La longueur du segment KUT est r.

$$SY = r.\cos h.\sin A$$

Afin de ne pas ajouter une variable supplémentaire il est nécessaire que r soit constant.

FREEMAN a recherché la courbe convexe telle que le segment de droite tangent à cette courbe et compris entre les deux axes de coordonnées soit constant. Cette courbe est classique, c'est une « astroïde » ou hypocycloïde à quatre rebroussements. Cette courbe est la seule correspondant à cette caractéristique géométrique. Le gnomon reprend une branche de cette courbe.



Equations :

Cartesiennes : $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

Paramétriques : $x = \cos^3(t)$

$y = \sin^3(t)$

Calcul de l'heure :

En fonction de la quatrième relation trigonométrique : $\sin A.\ \cos h = \cos\delta.\sin H$, il découle :

$$SY = r.\cos h.\sin A = r.\cos\delta.\sin H$$

SY permet de déterminer l'heure H, compte tenu de la déclinaison ou date : δ

Il suffit de tracer sur le bâti du cadran les courbes $Fn = r.\cos\delta.\sin H$

Les heures H sont définies par $H = 15°.(n-12)$; Les heures du matin sont à gauche de l'axe de symétrie du cadran, les heures de l'après-midi à droite.

Ex : 9h $H = -45°$; 16h $H = +60°$

Les dates ou déclinaisons sont orientées vers le bas du cadran (ou sud) pour $\delta>0$. Aux équinoxes, $\cos(\delta)=0$ et $Fn = r.\sin H$.

Commentaires :

Le cadran de FREEMAN est le premier cadran universel indépendant de la latitude du lieu d'observation. Cette caractéristique est fondamentale et rend le cadran très original.

Sur le plan de l'observation pratique nous savons que la détermination du point d'impact du rayon du soleil tangent à une courbe ou plus généralement à une surface est peu précis ; En effet l'ombre propre du gnomon est mince car celui-ci doit être peu épais et ce segment d'ombre (GT) est environné de lumière.

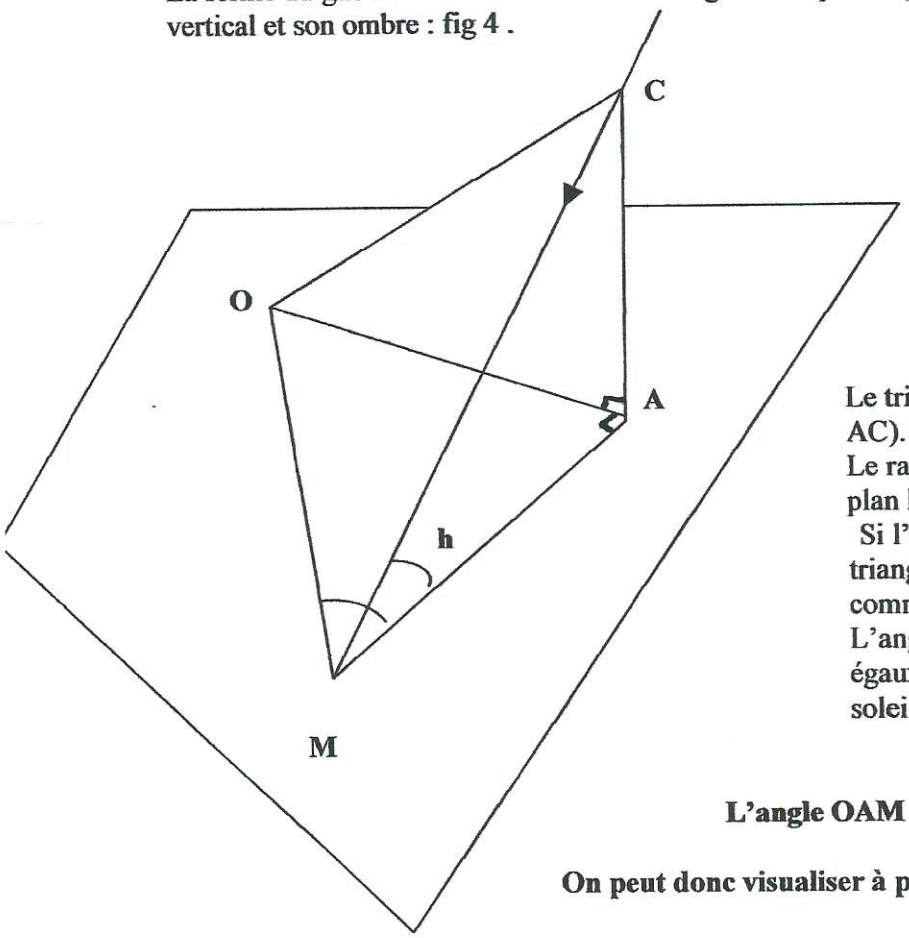
Le gnomon en forme d'astroïde et surtout le support vertical mobile en étrier qui ne doit pas perturber l'ombre propre du gnomon sont assez difficiles à réaliser en pratique.

Nous avons recherché à simplifier la forme du gnomon en gardant le concept de base du cadran de FREEMAN.

CADRAN SOLAIRE TRIANGULAIRE - indépendant de la latitude :

Forme du gnomon :

La forme du gnomon découle d'une relation géométrique simple entre un triangle rectangle isocèle vertical et son ombre : fig 4 .



Le triangle OAC est rectangle isocèle (0A = AC). Ce triangle est vertical .
Le rayon du soleil passant par C touche le plan horizontal en M.
Si l'angle OAM est droit en A, les deux triangles CAM et OAM sont égaux : un côté commun et deux côtés égaux.
L'angle AMO en M et l'angle ACM en C sont égaux. Ce dernier est égal à la hauteur du soleil : h

L'angle OAM en M est égal à la hauteur du soleil : h

On peut donc visualiser à plat la hauteur du soleil

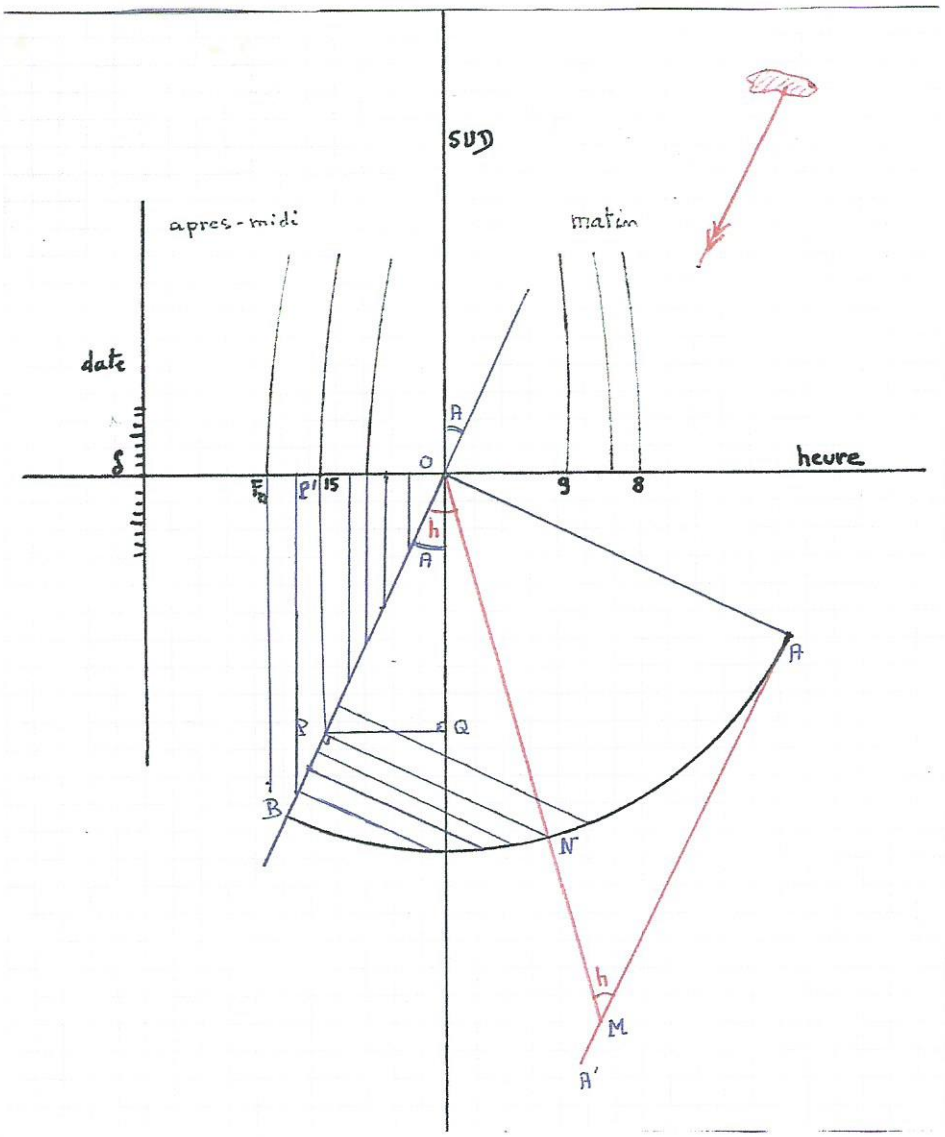


Schéma « cadran Triangulaire »

L'ombre de l'hypoténuse du gnomon OC est OM. Elle coupe le cercle de centre O et de rayon R en N.

Projetons N sur l'axe OB.
Le segment OP a pour longueur : R.cos h
Projetons P sur l'axe de symétrie du cadran OS
Le segment PQ a pour longueur : OP. Sin A = R cos h.sin A

Ce segment PQ correspond au segment SY dans la description précédente du cadran de FREEMAN.

La suite de la construction et de l'utilisation du « cadran triangulaire » est identique à celle du cadran de FREEMAN.

<u>Commentaires :</u>

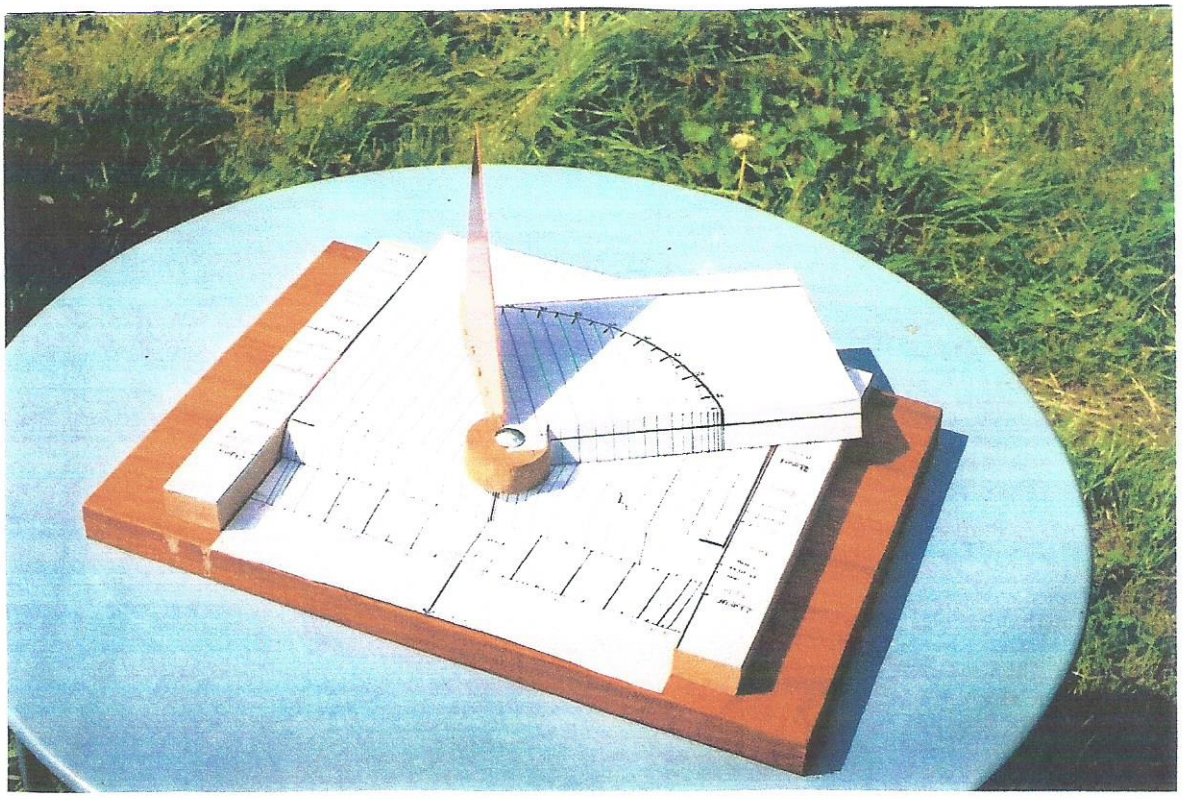
Le gnomon du « cadran triangulaire » est beaucoup plus facile à réaliser, puisque la seule pièce est un triangle rectangle isocèle.

L'ombre est un segment de droite (OM) particulièrement simple à interpréter.

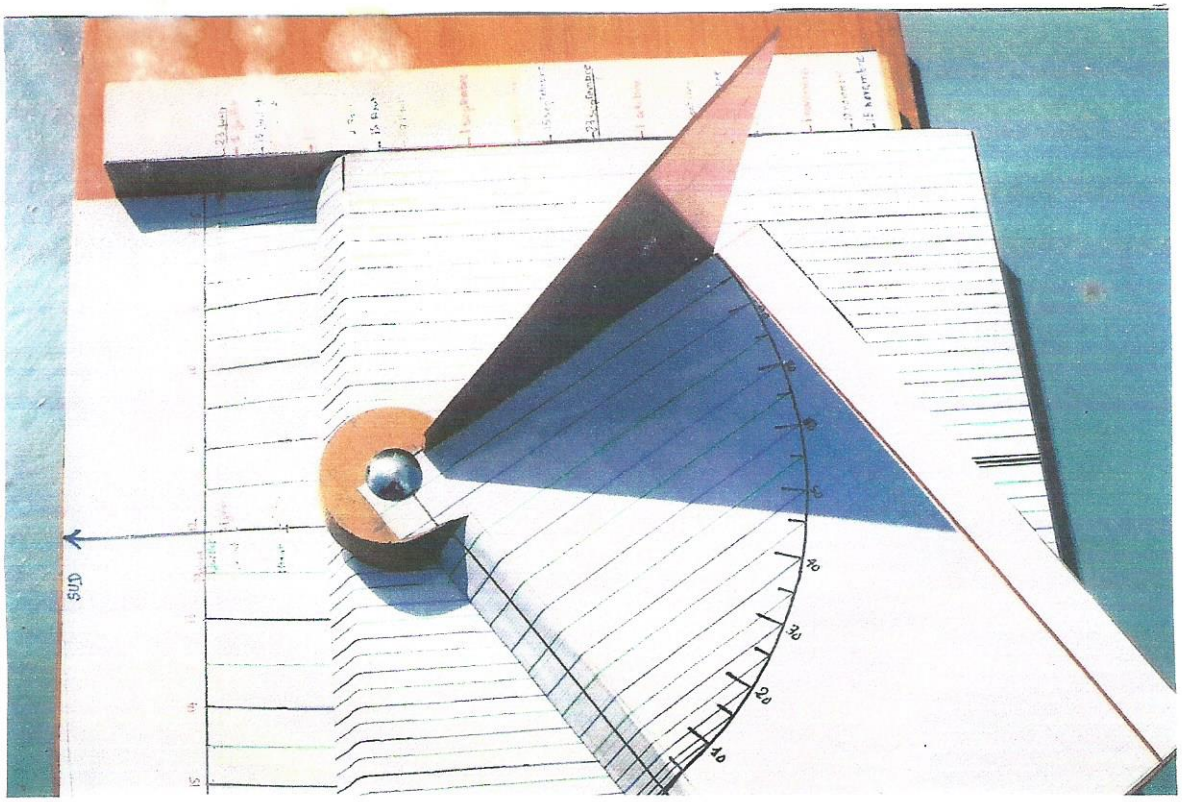
Le cercle est gravé avec des lignes perpendiculaires à l'axe OB pour repérer le point N intersection de l'ombre et du cercle.

Utilisation pratique :

- On place la cadran de façon que son axe de symétrie coïncide avec le méridien du lieu d'observation
- On tourne le gnomon face au soleil de sorte que l'ombre du bord vertical du gnomon coïncide précisement avec la droite AA', tangente au cercle en A.
- On peut connaître, à titre d'information, la hauteur h du soleil en lisant la graduation de l'angle en N.
- On fait glisser le cadran sur la bâti pour obtenir la date du jour d'observation.
- On lit l'heure H sur le réseau de courbes Fn en prenant l'intersection de la droite PP' et d'une courbe Fn.



« Cadran Triangulaire »



« Cadran Triangulaire »

Remarque : la maquette du cadran ci-dessus pourrait être réalisée avec des plaques de bois beaucoup moins épaisses ce qui éviterait d'avoir à prolonger les gravures de droite sur les épaisseurs pour faciliter la lecture de l'heure.

Bibliographie :

« A latitude-independent sundial » by J.G. Freemann – Bradford, England : Journal of Royal Astronomical Society of Canada . Vol. 72, n°2, 1978.

« Le gnomon astroïde de Freeman ». Jean Pakhomoff . Cadran-Info. SAF. Mai 2001

« La Gnomonique ». Denis Savoie, Les Belles Lettres, Paris, 2001